UNIDAD 14

CONJUNTOS

Objetivo general.

Al terminar esta Unidad entenderás y aplicaras los conceptos generales de conjuntos y resolverás ejercicios y problemas con conjuntos.

Objetivos específicos:

1. Recordarás la definición de un conjunto y sus elementos.
2. Expresarás conjuntos por extensión y por comprensión.
3. Recordarás la definición de un subconjunto y la igualdad entre conjuntos.
4. Recordarás la representación gráfica de conjuntos mediante los diagramas de Venn.
5. Recordarás las operaciones de unión e intersección de conjuntos y sus propiedades.
6. Recordarás la operación de diferencia de conjuntos y sus propiedades, así como el concepto de complemento de un conjunto.
7. Recordarás la operación de producto cartesiano de conjuntos y sus propiedades, así como el concepto de conjunto potencia.

Objetivo 1. Recordarás la definición de un conjunto y sus elementos.

Un **conjunto** es una colección de una clase particular. Las cosas (cualesquiera que sean) que constituyen un conjunto dado se llaman miembros o elementos del conjunto. Por ejemplo, los miembros de cierta bandada de codornices, los miembros de cierta manada de búfalos, son cada una de las codornices de la bandada y cada uno de los búfalos de la manada, y los miembros de una vajilla determinada son cada uno de los platos, copas, salseras, etcétera, de esa vajilla. Un conjunto, desde el punto de vista matemático, es una colección bien definida.

Se entiende por **conjunto** a la agrupación en un todo de objetos bien diferenciados de nuestra intuición o nuestra mente.

Algunos ejemplos de colecciones bien definidas son los siguientes:

a) El conjunto cuyos miembros son las letras del alfabeto.
b) El conjunto cuyos miembros son los meses del calendario
c) El conjunto cuyos miembros son todos los canales de televisión comercial de la ciudad de México.

Ahora se mostrara la forma de describir un conjunto:

A = {Maria, Juana Beatriz}

Se lee "el conjunto cuyos miembros son Maria, Juana y Beatriz". Se usaran letras mayúsculas, generalmente para simbolizar conjuntos como en este caso "A". Las llaves { } se usan para describir conjuntos, y los símbolos o nombres que están encerrados entre llaves, se entiende que son los miembros o elementos del conjunto.

El **símbolo** $\in$ se usa para abreviar "es miembro de" o "es elemento de". Por ejemplo: Si E se denota el conjunto de los números pares, la expresión "$2 \in E$" significa "2 es miembro de E". Para representar los elementos o miembros de un conjunto, se usan como símbolos las letras del alfabeto, por ejemplo: a, b, c, x, y, z. La expresión $a \in A$ indica que "a es miembro de A".

También se utiliza el **símbolo** $\notin$ se lee "no es miembro (elemento) de".

Ejemplos:

1. La expresión $a \in A$ indica que "a es miembro de A".
2. Si la profesora Jiménez no enseña en la Facultad de Ciencias y si C simboliza el conjunto de profesores de la Facultad de Ciencias, entonces se puede escribir:

   Profesora Jiménez $\notin C$,

   Se lee "la profesora Jiménez no es miembro (elemento) del conjunto C".

El **cardinal** indica el número o cantidad de los elementos constitutivos de un conjunto. Es interesante destacar que se diferencia del ordinal, porque el ordinal introduce orden y de ahí jerarquía: primero, segundo, tercero, etc. El cardinal, en cambio, nombra el número de elementos constitutivos y ése es el nombre del conjunto correspondiente.

Dado un conjunto A, el cardinal de este conjunto se lo simboliza |A| o card (A).

Ejemplo:

1. Si A tiene 3 elementos el cardinal se indica así: $|A| = 3$.

Dos cardinales no son iguales si tienen diferente número de elementos constitutivos: un conjunto de tres elementos, será diferente que si lo constituyen cuatro. Si uno se agregara a los cuatro, serían cinco, es decir, un conjunto diferente, más aún, esencialmente diferente.

Otra propiedad: el nombre del cardinal indica su existencia y su límite.

Por ejemplo, existe el cardinal tres y está constituido por tres elementos y no por cuatro. Ése es su límite. El conjunto que no tiene ningún elemento es el conjunto vacío.

Existen algunos conjuntos que no tienen miembros se le llama ***conjunto vacío o conjunto nulo***, que se simboliza por la letra ϕ del alfabeto escandinavo. También se puede usar el símbolo { } para representar el conjunto vacío.

El **conjunto universal** siempre se representa con la letra *U* (u mayúscula), que es el conjunto de todas las cosas sobre las que se este tratando. Así, si se habla de números enteros entonces *U* es el conjunto de los números enteros, si se habla de ciudades, *U* es el conjunto de todas las ciudades, este conjunto universal puede mencionarse explícitamente, o en las mayoría de los casos se da por supuesto dado el contexto que este tratando, pero siempre es necesario demostrar la existencia de dicho conjunto previamente.

Ejemplos:

1. En geometría plana el conjunto universal es el de todos los puntos del plano.
2. En los estudios sobre población humana el conjunto universal es el de todas las gentes del mundo.
3. Si A = {todos los números positivos menores que cero? Entonces A se llama el conjunto *vació* y se denota por ϕ .

Se dice que dos **conjuntos** A y B son **iguales**, si constan de los mismos elementos o miembros por lo que A = B. Es decir, siempre que para cualquiera que sea el elemento x, se verifique

$$x \in A \Leftrightarrow x \in B$$

Ejemplos:

1. Sean $A = \{1,2,3,4\}$ y $B = \{3,1,4,2\}$. Entonces $A = B$, es decir, $\{1,2,3,4\} = \{3,1,4,2\}$, pues cada unos de los elementos 1, 2, 3 y 4 de A pertenecen a B y cada uno de los elementos 3, 1, 4 y 2 de B pertenece a A. Obsérvese, por tanto, que un conjunto no camia al ordenar sus elementos.

2. Usando nuestros simbolismos, escribimos:

$$A = B\left[\left(x \in A \rightarrow x \in B\right) \wedge \left(x \in B \rightarrow x \in A\right)\right]$$
$$\text{o} \quad \left(x \in A\right) \leftrightarrow \left(x \in B\right)$$

$$A = \{2,6,8\},\ B = \{6,8,2\}$$

$A = B$ ¿Son iguales? *SI*

Conjunto unitario

Un **conjunto unitario** es un conjunto con un único elemento. Por ejemplo, el conjunto {0 } es un conjunto unitario. Observe que un conjunto como, por ejemplo, { { 1, 2, 3 } } es también un conjunto unitario: el único elemento es un conjunto (que, sin embargo, no es unitario). Un conjunto es unitario si y solamente si su cardinalidad es uno.

Conjuntos finitos e infinitos

El conjunto de elementos de un conjunto no vacío, puede ser finito o infinito.

Un ***conjunto es finito*** cuando se pueden listar exhaustivamente sus elementos en algún orden, y en con secuencia contarlos uno a uno s hasta alcanzar el último.

En caso contrario, si el conjunto no posee un último elemento, se dice que es un ***conjunto infinito.***

Ejemplos de *conjuntos finitos* son: los empleados de una empresa, los periódicos de un país, los proveedores de la industria de la construcción, etc.

Ejemplos de *conjuntos infinitos* son: el conjunto de enteros positivos, el número de rectas que pasan por un punto, etc.

Estos conjuntos son infinitos porque no es posible listar todos sus elementos y enumerar explícitamente la totalidad de ellos. El proceso de conteo de los elementos nunca termina, para un conjunto infinito.

La notación para el conjunto de los números naturales (enteros positivos) es la siguiente:

N = {1, 2, 3, 4, 5, 6,…..}, es decir que se listan algunos de los elementos del conjunto, seguidos de puntos suspensivos (que equivalen al etc.), y que reemplazan a los elementos no listados. Esta forma de notación se emplea a menudo pero no es muy satisfactoria desde el punto de vista lógico. En sentido estricto el método de listado o de enumeración, es inaplicable a conjuntos infinitos. Para especificar correctamente un conjunto infinito se debe citar alguna propiedad definitoria, es decir especificarlo por comprensión.

Los *conjuntos infinitos* se presentan en muy diversos problemas concretos. Por ejemplo, en el control estadístico de calidad, los analistas del proceso de producción pueden considerar que la maquina bajo observación genera un flujo continuo e infinito de productos.

Ejemplos:

1. Si M es el conjunto de los días de la semana, entonces M es finito.
2. Si N = {2 , 4 , 6, 8 ,…}, N es infinito.
3. El conjunto de círculos con centro en el origen (0,0) es un conjunto infinito.

Ejercicios resueltos:

1. {2, 4, 6} es un conjunto. Los elementos que forman este conjunto son: 2, 4, 6

2. ¿Cuántos elementos hay en el conjunto {manzana, pastel, durazno}? 3 elementos

3. A= {1, 2, 3} B = {2, 3, 4}

   ¿4 es un elemento de A? No

   ¿4 es un elemento de B? Si

4. Si $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, entonces $7 \notin U$,

   ¿Se podría extraer A= {1, 2, 3, 7} de este universo? *No*

   ¿Se podría extraer B = {2, 5 ,6}? *Si*

5. A= {5, 6, 7} B = {6, 7, 8}

   ¿$8 \in$ A? No

   ¿$8 \in$ B? Si

6. Del ejemplo anterior como 8 no es un miembro de A podemos escribir:

   $8 \notin A$

7. $A=\{1,2,3\}$, $B=\{1,5,2,7\}$

   ¿Se cumple $x \in A \rightarrow x \in B$? SI

   ¿Se cumple $x \in B \rightarrow x \in A$? NO

   ¿Son iguales los dos conjuntos? NO

8. $C = \{6,4\}$

Escribe un conjunto D tal que D=C

$D = \{4,6\}$

9. Si U = {1, 2, 3, 4, 5} , B = {1, 2} y C = {3,4}, entonces el conjunto formado por todos los elementos comunes a B y C se le llama conjunto vació.

10. Si P = {x| es un rio de la Tierra}, P también es finito aunque sea difícil contar los ríos del Mundo.

11. El conjunto de números que son múltiplos de 5 es un conjunto infinito porque no nunca se llega a un fin , observa: $A = \{5, 10, 15, 20, ...\}$

Problemas propuestos:

1. Haga una lista de los elementos de los siguientes conjuntos; en donde

$N = \{1, 2, 3, ...\}$.

(a) $A = \{x : x \in N, 3 < x < 12\}$
(b) $B = \{x : x \in N, x \text{ es par}, x < 15\}$
(c) $C = \{x : x \in N, 4 + x = 13\}$

2. ¿Cuáles de los siguientes conjuntos son iguales?

$\{1,2\},\{1,3\},\{2,1\},\{3,1,3\},\{1,2,1\}$

$A=\{x : x^2-4x+3=0\}$

$B=\{x : x^2-3x+2=0\}$ (c)

$C=\{x : x\in N, x<3\}$

$D=\{x : x\in N, x\ \text{es impar}, x<5\}$

3. Determine cuales de los siguientes conjuntos son finitos o infinitos:
   a) El conjunto de las rectas paralelas al eje x
   b) El conjunto de las letras en el alfabeto español
   c) El conjunto de números que son soluciones de la ecuación :

   $$x^{27}+26x^{18}-17x^{11}+7x^3-10=0$$

   d) $D=\{x \mid x\ \text{es impar}\}$

4. Entre los conjuntos que siguen, ¿cuáles son diferentes?

   (a) $\varnothing$

   (b) $\{0\}$

   (c) $\{\varnothing\}$

5. ¿Cual de estos conjuntos son vacíos?

   (a) $A=\{x \mid x\ \text{es una letra anterior a "a" en el alfabeto}\}$

   (b) $B=\{x \mid x^2=9\ \text{y}\ 2x=4\}$

   (c) $C=\{x \mid x\neq x\}$

   (d) $D=\{x \mid x+8=8\}$

Soluciones:

1.

(a) $A = \{4,5,6,7,8,9,10,11\}$

(b) $B = \{2,4,6,8,10,12,14\}$

(c) $C = \varnothing$

2.

$\{1,2\} = \{2,1\} = \{1,2,1\} = B = C$

$\{1,3\} = \{3,1,3\} = A = D$

3.

a) infinito

b) finito

c) finito

d) infinito

4.

a) El conjunto $\varnothing$ no tiene elementos, es el conjunto vació.

b) El conjunto $\{0\}$ contiene un elemento, el numero cero.

c) El conjunto $\{\varnothing\}$ tiene también un elemento que es el conjunto vació.

5.

a) Es vació

b) Es vació

c) Es vació

d) No es vació

Objetivo 2. Entenderás un conjunto de forma extensiva y comprensiva.

Especificación de conjuntos

Para especificar un conjunto se recurre usualmente a uno de los siguientes métodos:

a) Listar todos sus elementos, separarlos mediante comas y encerarlas entre llaves (llamado método de enumeración, de tabulación o “por extensión”).
b) Encerrar entre llaves una propiedad definitoria que exprese específicamente cuáles son los requisitos que debe satisfacer un elemento para pertenecer al conjunto (llamado método “descriptivo o “por comprensión”).

El método por “extensión” es sumamente sencillo y no da lugar a ambigüedades. Sin embargo, no todos los conjuntos se puedes especificar enumerando sus elementos.

El método por “comprensión” proporciona un criterio práctico para determinar si un elemento arbitrario pertenece a un conjunto determinado: los objetos que poseen la propiedad, y solo ellos, pertenecen al conjunto. A su vez, esto nos obliga a precisar con toda claridad la propiedad definitoria, para evitar ambigüedad e incertidumbre.

Ejemplos:

1) El conjunto cuyos elementos son los números 0, 7 y 14, esta formado por tres elementos. Si se designa este conjunto con la letra G, queda especificado convenientemente mediante el método de “extensión”, así:

   $G = \{0, 7, 14\}$ Afirmaciones y $7 \in G$ y $10 \notin G$ son verdaderas.

2) ¿Cuál seria la interpretación de la siguiente oración?

   $Q = \{$activo, pasivo, capital$\}$

Solución: "Q es el conjunto cuyos elementos cuyos elementos son activo, pasivo y capital" ó podría ser así: "Q es el conjunto cuyos elementos son los tres componentes fundamentales de un Balance General".

Ejercicios resueltos:

1. Enunciar con palabras los siguientes incisos con el método de extensión

   a) $A = \{x \mid x^2 = 4\}$

   Se lee "A es el conjunto de los x tales que x al cuadrado es igual a cuatro". Los únicos números que elevados al cuadrado dan cuatro son 2 y -2, así que $A = \{2, -2\}$.

   b) $B = \{x \mid x - 2 = 5\}$

   Se lee "B es el conjunto de los x tales que x menos 2 es igual a 5". La única solución es 7, de modo que $B = \{7\}$.

   c) $C = \{x \mid x \text{ es positivo}, x \text{ es negativo}\}$

   Se lee "C es le conjunto de los x tales que x es positivo y x es negativo". No hay ninguno número que sea positivo y negativo, así que C es vacío, es decir, $C = \varnothing$.

   d) $D = \{x \mid x \text{ es una lera de la palabra "correcto"}\}$

   Se lee "D es el conjunto de los x tales que x es una letra de la palabra *correcto*". Las letras indicadas son c, o, r, e y t; así pues, $D = \{c, o, r, e, t\}$.

2. Escribir estos conjuntos con el método de compresión

   a) A que consiste de las letras a, b, c, d y e. Pueden existir muchas soluciones primer resultado:

   $A = \{x \mid x \text{ esta antes de } f \text{ en el alfabeto}\}$ y como segundo resultado se tiene el siguiente:

   $A = \{x \mid x \text{ es unas de las primeras cinco letras del alfabeto}\}$

b) $B = \{2, 4, 6, 8, ...\}$

$B = \{x \mid x \text{ es positivo y par}\}$

c) El conjunto C de todos los países de Estados Unidos.

$C = \{x \mid x \text{ es un pais, x esta en los EstadosUnidos}\}$

d) El conjunto $D = \{3\}$

$D = \{x \mid x - 2 = 1\} = \{x \mid 2x = 6\}$

Problemas propuestos:

1. Expresar los siguientes conjuntos por el método de extensión:

a) $A = \{x \in N,\ 5 < x \text{ par} \leq 18\}$

b) B = {Las letras de la palabra Matemáticas}

c) $C = \{x^2 - 16 = 0\}$

d) D = {Las formas de especificar un conjunto}

2. Especifique los siguientes conjuntos por el método de comprensión:

a) $A = \{\text{Europa, Asia, América, África, Oceanía}\}$

b) $B = \{a, e, i, o, u\}$

c) $C = \{\text{rojo, azul, amarillo}\}$

d) $D = \{\text{Pacífico, Atlántico, Ártico, Antártico, Indico}\}$

Solución:

1.

a) A = {6, 8,10, 12, 14, 16, 18}

b) B = {m, a , t , e, m , á , t , i , c , a , s}

c) C = {+ 4, -4}

d) D = {comprensión, extensión}

2.

a) A = {Los cinco continentes del mundo}

b) B = {vocales del alfabeto}

c) C = {Los colores primarios}

d) D = {Los océanos}

Objetivo 3. Recordaras la definición de subconjunto y la igualdad entre ellos.

Para dos conjuntos cualesquiera A y B se dice que A es un subconjunto de B, y se simboliza por $A \subset B$, si cada elemento de A es también un elemento de B. En símbolos es:

$A \subset B$ si y solo si $a \in B$ implica que $a \in B$

Ejemplos:

a) M = {21, 27, 30}; N = {21, 30, 40, 27}

$M \subset N$, ya que cada elemento del conjunto M pertenece al conjunto N.

b) V = {vocales}; L = {letras del abecedario}

$V \subset L$, ya que para toda $v \in V$ implica que $v \in L$.

Ejercicios resueltos:

1. Considere los siguientes conjuntos:

$$\varnothing,\ A=\{1\},\ B=\{1,3\},\ C=\{1,5,9\},\ D=\{1,2,3,4,5\},\ E=\{1,3,5,7,9\},\ U=\{1,2,......,8,9\}$$

Inserte el símbolo correcto $\subset$ o $\not\subset$ entre cada pareja de conjuntos:

$$\begin{array}{llll}(a)\ \varnothing \subset A & (b)\ A \subset B & (c)\ B \not\subset C & (d)\ B \subset E \\ (e)\ C \not\subset D & (f)\ C \subset E & (g)\ D \not\subset E & (h)\ D \subset U\end{array}$$

a) $\varnothing \subset A$ ya que $\varnothing$ es un subconjunto de todo conjunto.

b) $A \subset B$ ya que 1 es el único elemento de A y pertenece a B.

c) $B \not\subset C$ ya que $3 \subset B$ pero $3 \notin C$.

d) $B \subset E$ ya que los elementos de B también pertenecen a E.

e) $C \not\subset D$ ya que $9 \in C$ pero $9 \notin D$.

f) $C \subset E$ ya que los elementos de C también pertenecen a E

g) $D \not\subset E$ ya que $2 \in D$ pero $2 \notin E$.

h) $D \subset U$ por que los elementos de D también pertenecen a U.

2. Considérese los conjuntos:

$$A = \{1,3,4,5,8,9\},\ B = \{1,2,3,5,7\} \text{ y } C = \{1,5\}$$

Verificar si:

a) $C \subset A$ y $C \subset B$

Si se cumple ya que 1y 5 son elementos de A, B y C.

b) $B \not\subset A$

Si se cumple ya que 2 y 7, no pertenecen a A

Se puede observar que $C \subset A$

3. Usando los conjuntos dados, contesta si o no a las siguientes preguntas:

$A = \{1,4,2,6,8,10\},\ \ B = \{1,4,6,10\},$
$C = \{6,4,1,10\},\ \ D = \{6,4,1\}$
$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

¿Es $A = D$? *NO*
¿Es $D \subseteq A$? *SI*
¿Es $B = C$? *SI*
¿Es $B \subseteq A$? SI
¿Es $A \subseteq B$? NO
¿Es $A \neq B$? *SI*
¿Es $B \not\subset D$? NO
¿Es $\varnothing \subseteq D$? SI
¿Es $\varnothing = B$? NO
¿Es $\varnothing \subseteq B$? SI
¿Es $B \subseteq U$? SI
¿Es $A = U$? NO

Problemas propuestos:

1. La siguiente tabla presenta los resultados de seis entrevistas efectuadas a solicitantes de trabajo por el Departamento de Relaciones Humanas de la empresa X.

Nombre del solicitante	Sueldo q solicita	Edad	Estado civil	Habla ingles	Tiene auto
Sr. Efrén Ramírez	6 000	32	Casado	Si	Si
Sr. Jorge López	5 000	30	Soltero	No	No
Sr. José Hernández	7 000	29	Casado	Si	No
Sr. Luis García	5 500	35	Soltero	No	Si
Sr. Raúl Jiménez	5 000	26	Casado	No	Si
Sr. Jorge Fernández	8 000	28	Soltero	si	Si

Basándose en estos datos:

a) Especifique el conjunto universal por los métodos de comprensión y extensión
b) Determine varios ejemplos de conjuntos de personas del sexo masculino que carezcan de elementos
c) Determine el número de elementos de los siguientes conjuntos:

A = {Solicitantes del sexo masculino}

B = {Solicitantes del sexo femenino}

C = {Solicitantes que hablan ingles}

D = {Solicitantes que tienen automóvil}

E = {Solicitantes menores de 30 años}

2. Sean $A = \{1, 2, ..., 8, 9\}, B = \{2, 4, 6, 8\}$, $C = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $D = \{3, 4, 5\}$ y $E = \{3, 5\}$.

   ¿Cuáles conjuntos pueden ser iguales a Z si se nos da la siguiente información?

   (a) Z y B son disjuntos (c) $Z \subset A$ pero $Z \not\subset C$

   (b) $Z \subset D$ pero $Z \not\subset B$ (d) $Z \subset C$ pero $Z \not\subset A$

3. Sean los siguientes conjuntos:

   P = {r, s, t, u, v, w} V = {s}

   Q = {u, v, w, x, y, z} Z = { }

   R = {s, u, y, z}

   S = {u, v}

   T = {s, u}

Determine cual de estos conjuntos:

a) Es subconjunto de P y de Q únicamente.
b) Es subconjunto de R pero no de Q.
c) No es subconjunto de P ni de R.
d) No es subconjunto de R pero si de Q.
e) Es subconjunto de todos los demás.

Soluciones:

1.

a) Especificaron del conjunto universa

i) Por el método de compresión:

Ω = {x | x es solicitante de trabajo en la empresa X}

Ω = {solicitantes de empleo en el Departamento de Recursos Humanos de la empresa X}

ii) Por el método de extensión:

Ω = {Jorge López, Efrén Ramírez, José Hernández, Luis García, Raúl Jiménez, Jorge Fernández}

b) K = {solicitantes viudos}

K = {solicitantes de mas de 40 años}

M = {solicitantes que pretenden un sueldo inferior a 4 500 pesos}

c) n (A) = 6

n (B) = 0

n (C) = 3

n (D) = 4

n (E) = 3

2.

a) C y E
b) D y E
c) A, B y D
d) ninguno

3.

a) S; $S \subset P$ y $S \subset Q$

R, T, V; $R \subseteq R$ pero $R \not\subset Q$

b) $T \subseteq R$ pero $T \not\subset Q$

$V \subseteq C$ pero $V \not\subset Q$

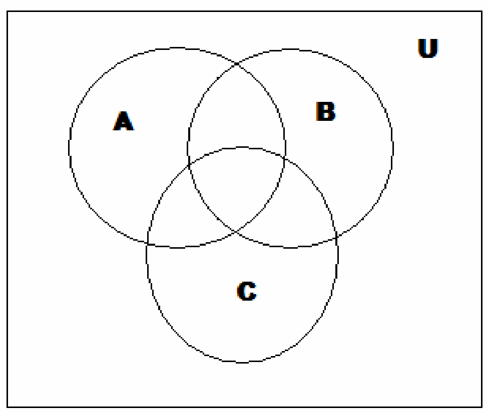
c) Q; $Q \not\subset P$ y $Q \not\subset R$
d) S, Q ; $S \not\subset R$ pero $S \subset Q$

$Q \not\subset R$ pero $Q \subseteq Q$

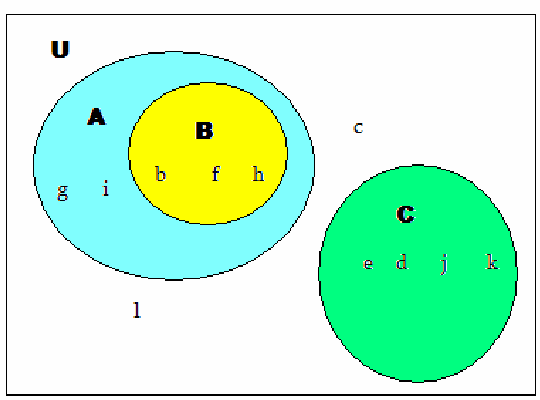
e) $\varnothing$ esta contenido en todos los demás.

Objetivo 4. Recordarás la representación gráfica de conjuntos mediante los diagramas de Venn.

Estos diagramas se usan para mostrar gráficamente la relación matemática o lógica entre diferentes grupos de cosas (conjuntos), representando cada conjunto mediante un óvalo o círculo. La forma en que esos círculos se sobreponen entre sí muestra todas las posibles relaciones lógicas entre los conjuntos que representan. Por ejemplo, cuando los círculos se superponen, indican la existencia de subconjuntos con algunas características comunes, con estas circunferencias se pueden realizar una serie de operaciones como la unión, la intersección, etc.



Por ejemplo el siguiente diagrama de Venn:



La descripción del diagrama es la siguiente:

U = {a, b, c, d, e, f, g, h, i, j, k. l}

A = {b, f, g, h, i}

B = {b, f, h}

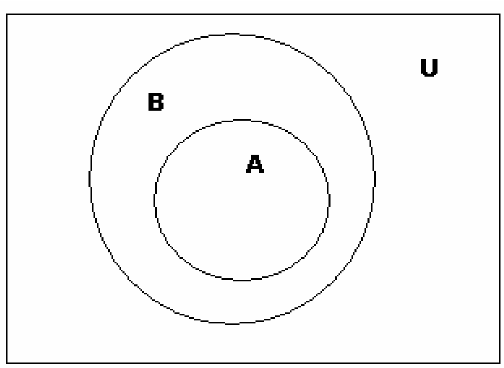
C = {d, e, j, k}

Donde se observo que:

$A \subset U$, $B \subset U$, $C \subset U$ y $B \subset A$

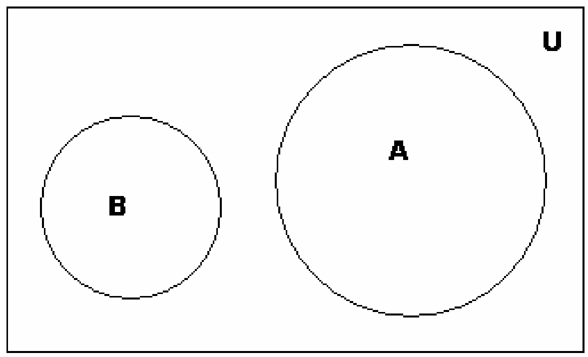
Ejemplos:

Si $A \subset B$, entonces el círculo que representa a A estará completamente dentro del círculo que representa a B como en la siguiente figura:



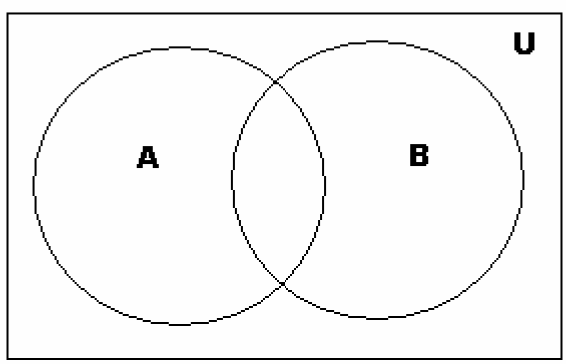
$A \subset B$

Si A y B son disjuntos, o sea, sino tienen ningún elemento en común, entonces el círculo que representa a A quedara separado del círculo que representa a B, a continuación la siguiente figura:



A y B son disjuntos

Si A y B son dos conjuntos arbitrarios, es posible que algunos elementos estén en A, pero no en B; algunos estén en B, pero no en A; algunos están en ambos, y algunos no estén ni en A ni en B; así que en general representamos a A y a B como en la siguiente figura:



En los siguientes temas representaremos los diagramas de Venn junto con las propiedades de conjuntos.

Objetivo 5. Recordarás las operaciones de unión e intersección de conjuntos y sus propiedades.

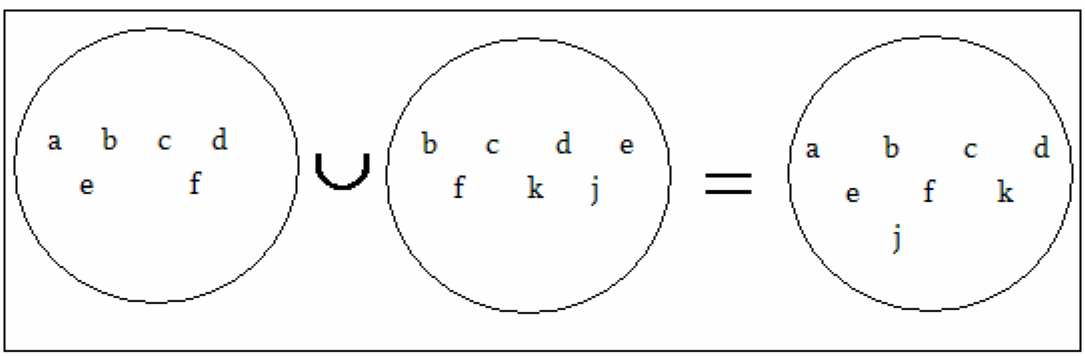
UNIÓN

Se llama unión de dos conjuntos A y B al conjunto formado por los elementos que pertenecen a A o B.

$$A \cup B = \{x | x \in A \ \text{ o } \ x \in B\}.$$

Se lee A unión B está formado por todos los elementos x tal que x pertenece a A o x pertenece a B o bien x pertenece a los dos conjuntos a la vez.

Representación gráfica:



$A = \{a, b, c, d, e, f\}$

$B = \{b, c, d, e, d, f, j, k\}$

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, j, k\}$

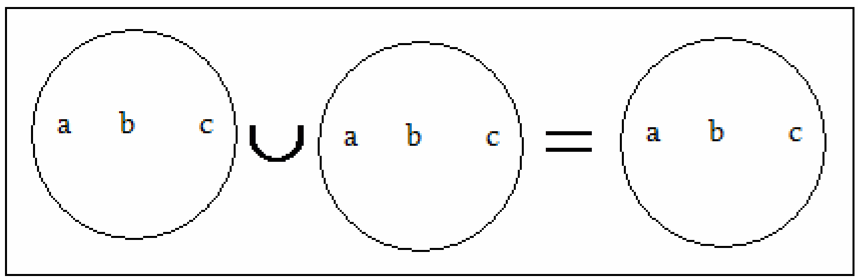
UNIÓN CON LOS CONJUNTOS ESPECIALES.

a) La unión de un conjunto consigo mismo:

$M \cup M = M$

$M = \{a, b, c\}$

$M \cup M = \{a, b, c\}$



b) Dado el conjunto :

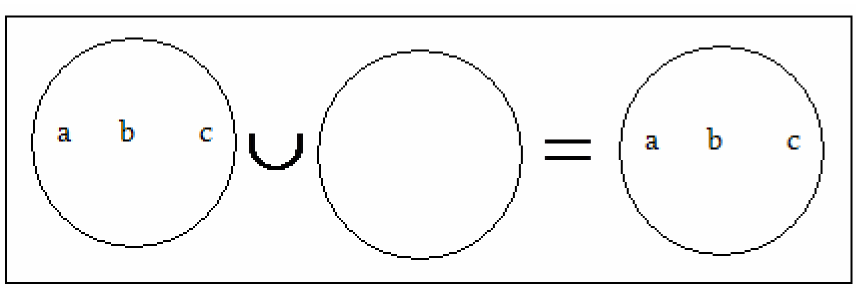
$P=\{4,7,8,9\}$

$U=\{numeros\}$

$P \cup U = U$

c) Dado el conjunto $R=\{m, n, p\}$ y $S=\varnothing$

$R \cup \varnothing = R$



PROPIEDADES DE LA UNIÓN.

Cualesquiera que sean los conjuntos A, B y C se demuestra que:

1. $A \cup \varnothing = A$
2. $A \cup A = \varnothing$ Idempotencia
3. $A \cup B = B \cup A$ Conmutativa
4. $\left(A \cup B\right) \cup C = A \cup \left(B \cup C\right)$ Asociativa

Ejemplos:

1. $\mathrm{U}\{1,2,3,4,5\}$, $\mathrm{A}=\{1,4\}$, $\mathrm{B}=\{2,5\}$ los elementos que están en A o en B son:

   1, 2, 4, 5

2. $\mathrm{U}\{1,2,3,4,5\}$, $\mathrm{A}=\{1,2\}$, $\mathrm{B}=\{3,4\}$ el conjunto formado por todos los elementos que se encuentran en A, junto con todos los que se encuentran en B es

   1, 2, 3, 4

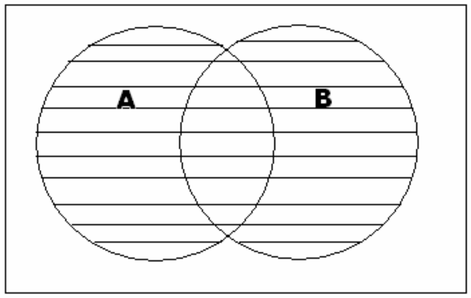
3. Si $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ y $\mathrm{x} \in \mathrm{B}$ ¿Se cumple $\mathrm{x} \in \left(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}\right)$? **SI**

4. Si $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$ y $\mathrm{x} \notin \mathrm{B}$, ¿Se cumple $\mathrm{x} \in \left(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}\right)$? **NO**

5. Si $\mathrm{x} \in \left(\mathrm{A} \cup \mathrm{B}\right)$ ¿Es necesariamente $\mathrm{x} \in \mathrm{A}$? **NO**

Ejemplos resueltos:

1. En el diagrama de Venn de la figura $\mathrm{A} \cup \mathrm{B}$ aparece rayado, o sea el área de A y el área de B.



2. Sean $S = \{a, b, c, d\}$ y $T = \{f, b, d, g\}$. Entonces

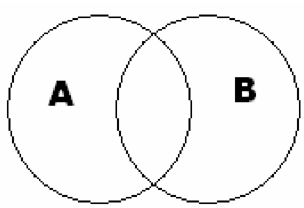
$$S \cup T = \{a, b, c, d, f, g\}$$

3. Sea p el conjunto de los números reales positivos y Q el conjunto de los números reales negativos $P \cup Q$, unión de P y Q consiste en todos los números reales exceptuando el cero.
   La unión A y B se puede definir también concisamente así:

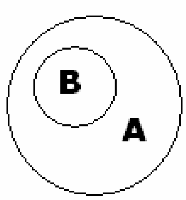
$$A \cup B = \{x \mid x \in A \ \text{ o } \ x \in B\}$$

Ejemplos propuestos:

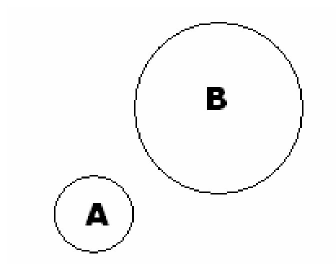
1. En los diagramas de Venn que siguen, rayar A unión B o sea
   a)



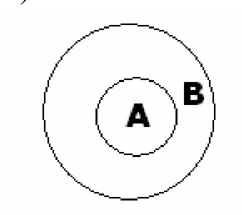
b)



c)



d)



2. Sea $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6,8\}$, $C = \{3,4,5,6\}$. Hallar

   a) $A \cup B$
   b) $A \cup C$
   c) $B \cup C$
   d) $B \cup B$

3. Sean A, B, C los conjuntos del problema 2. Hallar

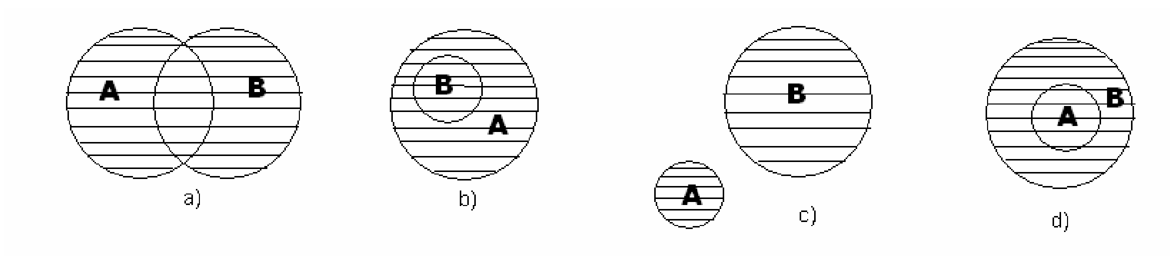
   a) $(A \cup B) \cup C$
   b) $A \cup (B \cup C)$

4. Sean el conjunto, $X = \{\text{Marcos}, \text{Ricardo}, \text{Enrique}\}$ y el conjunto $Y = \{\text{Tomas}, \text{Marcos}, \text{Emilio}\}$ y $Z = \{\text{Marcos}, \text{Emilio}, \text{Eduardo}\}$. Hallar

   a) $X \cup Y$
   b) $Y \cup Z$
   c) $X \cup Z$

Soluciones:

1.



2.

$$A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$$
$$A \cup C = \{1,2,3,4,5,6\}$$
$$B \cup C = \{2,3,4,5,6,8\}$$
$$B \cup B = \{2,4,6,8\}$$

3.

a) Se determina primero $A \cup B = \{1,2,3,4,6,8\}$. Entonces la unión de $A \cup B$ Y C es: $(A \cup B) \cup C = \{1,2,3,4,6,8,5\}$.

b) Se determina primero $B \cup C = \{2,4,6,8,3,5\}$. Entonces la unión de A y $B \cup C$ es: $A \cup (B \cup C) = \{1,2,3,4,6,8,5\}$

Nótese que: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

4. Para hallar $X \cup Y$ se hace la lista de los nombres de X con los nombres de Y; así
   a) $X \cup Y = \{\text{Marcos}, \text{Ricardo}, \text{Enrique}, \text{Tomas}, \text{Emilio}\}$ Del mismo modo:
   b) $Y \cup Z = \{\text{Marcos}, \text{Tomas}, \text{Emilio}, \text{Eduardo}\}$
   c) $X \cup Z = \{\text{Marcos}, \text{Ricardo}, \text{Enrique}, \text{Emilio}, \text{Eduardo}, \text{Tomas}\}$

INTERSECCIÓN

Se llama intersección de dos conjuntos R y S al conjunto formado por los elementos que pertenecen simultáneamente a R y S.

$R \cap S = \{x / x \in R \wedge x \in S\}$

Que se lee: R intersección S es el conjunto formado por los elementos x tal que x pertenece a R y x pertenece a S.

Ejemplos:

$R = \{\text{flores rojas}\}$
$S = \{\text{rojas}\}$

$R \cap S = \{\text{rosas rojas}\}$

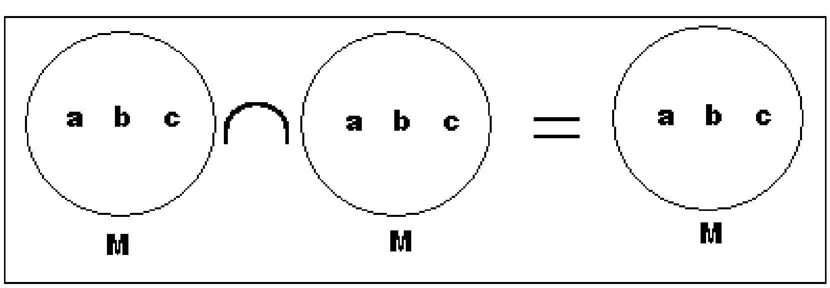
INTERSECCIÓN CON LOS CONJUNTOS ESPECIALES.

a) La intersección con un conjunto consigo mismo:

$M = \{a, b, c\}$

$M \cap M = \{a, b, c\}$

$M \cap M = M$



b) Dado el conjunto

$P = \{7, 6, 8, 13\}$
$U = \{numeros\}$
$P \cap U = P$

c) Dados

$S = \{4, 7, 8, 9\}$
$R = \varnothing$
$S \cap R = \varnothing$

PROPIEDADES DE LA INTERSECCIÓN.

Cualesquiera que sean los conjuntos A, B y C se tiene que:

1. $A \cap \varnothing = \varnothing$
2. $A \cap A = A$ Idempotencia
3. $A \cap B = B \cap A$ Conmutativa
4. $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ Asociativa

Ejemplos:

1. U=$\{1,2,3,4\}$, $A = \{1, 2, 4\}$, $B = \{1, 3, 4\}$

   El conjunto formado por los elementos comunes a A y B es $\{1, 4\}$

2. U=$\{2,4,6,8,10\}$, $A = \{2, 4, 10\}$, $B = \{4, 8, 10\}$

   El conjunto que contiene todos los elementos que se encuentran en A y al mismo tiempo en B es

   $\{4,10\}$

3. U=$\{1,2,3,5,7\}$, $E=\{3,5,7\}$, $F=\{2,3,5\}$

   Los elemento que se encuentran en E como en F son $\{3,5\}$

4. U=$\{1,2,3,4,5\}$, $H=\{1,2\}$, $G=\{4,5\}$

   ¿Cuál es el conjunto que describe los elementos comunes a H y G? $\varnothing$

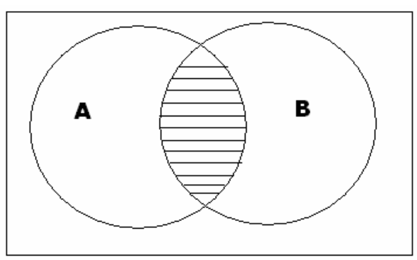
5. Si A y B son dos conjuntos extraídos del mismo universo U, la intersección de A y B, denotada por $(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$ es el conjunto que contiene todos los elementos comunes a los conjuntos A y B.

6. Si $4\in(\mathrm{A}\cap\mathrm{B})$, ¿Se cumple qué $4\in A$? ***SI***

   ¿Se cumple qué $4\in B$? ***SI***

Ejemplos resueltos

1. En el diagrama de Venn se ha rayado $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}$, el área común a ambos conjuntos A y B.



2. Sea $\mathrm{S}=\{\mathrm{a},\mathrm{b},\mathrm{c},\mathrm{d}\}$ y $\mathrm{T}=\{\mathrm{f},\mathrm{b},\mathrm{d},\mathrm{g}\}$. Entonces:

$$\mathrm{S}\cap\mathrm{T}=\{\mathrm{b},\mathrm{d}\}$$

3. Sean $\mathrm{V}=\{2,4,6,...\}$, es decir los múltiplos de 2: y sea $\mathrm{W}=\{3,6,9,...\}$ o sean los múltiplos de 3. Entonces:

$$\mathrm{V}\cap\mathrm{W}=\{6,12,18,...\}$$

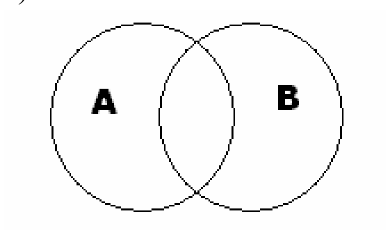
La intersección de A y B también se pueden definir concisamente así;

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \ \text{ y } \ x \in B\}$$

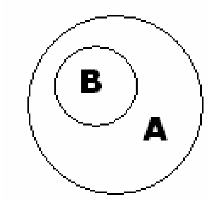
Ejemplos propuestos:

1. En los diagramas de Venn rayar A intersección B, o sea $A \cap B$:

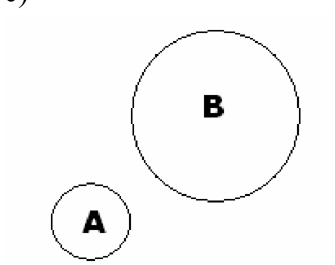
a)



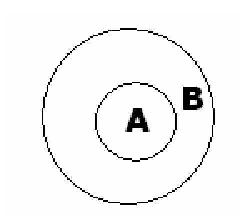
b)



c)



d)



2. Sea $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6,8\}$, $C = \{3,4,5,6\}$. Hallar
   a) $A \cap B$

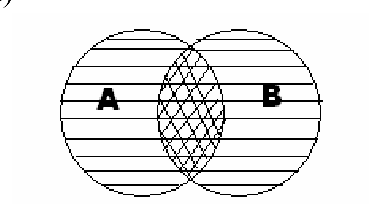
b) $A \cap C$
c) $B \cap C$

3. Sean A, B, C los conjuntos del problema 2. Hallar:
a) $(A \cap B) \cap C$
b) $A \cap (B \cap C)$

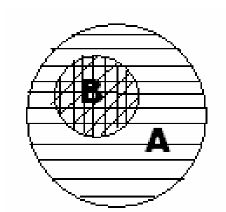
Soluciones:

1. La interacción e A y B consiste en el área que es común tanto en A como en B. Para encontrar $A \cap B$, se raya primero A con trazos oblicuos hacia la derecha y luego se raya B con trazos oblicuos inclinados alas izquierda como se ve en la figura:

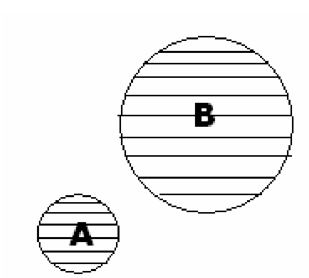
a)



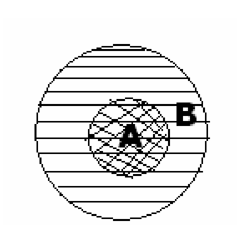
b)

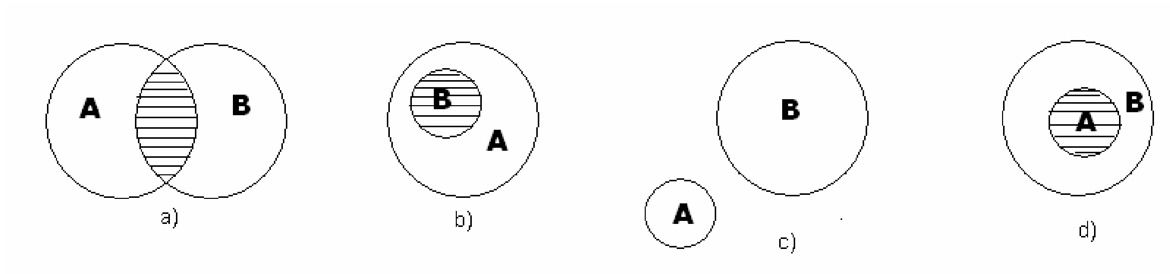


c)



d)





Nótese que en el inciso (c) es vacía, A y B son disjuntos.

2.

a) Para formar la intersección de A y B se inscriben todos los elementos comunes de A y B; asi $A \cap B = \{2,4\}$

b) De igual manera $A \cap C = \{3,4\}$

c) $B \cap C = \{4,6\}$

d) $B \cap B$ es efectivamente B

3.

a) $A \cap B = \{2,4\}$. Así que la intersección de $\{2,4\}$ con C es: $(A \cap B) \cap C = \{4\}$

b) $B \cap C = \{4,6\}$. La intersección de este conjunto con A es $\{4\}$, esto es, $A \cap (B \cap C) = \{4\}$

Nótese que $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

Objetivo 6. Recordarás las operaciones diferencia y complemento de conjuntos y sus propiedades.

COMPLEMENTO

Dado un subconjunto A de E, se llama complemento de A con relación a E, al conjunto de los elementos de E que no pertenecen a A.

$$C'A = \{x : x \notin A \wedge x \in E\}$$

También se simboliza por A^C ó CA ó A' ó $\overline{A}$ para que no se preste a confusión

COMPLEMENTO Y NEGACIÓN LÓGICA

En un referencial E, ser elemento de una parte de A de E es poseer la propiedad (p); ser elemento del complemento CA significa no poseer la propiedad (p), es decir, tiene la propiedad (-p).

$$A = \{x : p(x)\} \Leftrightarrow C_E A = \{y : -p(y)\}$$

Para toda parte de A de E

$$\begin{cases} \text{si } \; x \in A \Rightarrow x \notin C'A \;\text{ entonces, }\; x \in C'(C'A) \\ \\ \text{si } \; x \in C'(C'A) \Rightarrow x \notin C'A \;\text{ entonces, }\; x \in A \end{cases}$$

Por tanto $C'(C'A) = A$ que equivale a [-(-p) $\Leftrightarrow$ (p)].

Se dice que A y $C'A$ son complementarios

PROPIEDADES DEL COMPLEMENTO

Para todo conjunto E:

1. $C'A = \varnothing$ y $C'\varnothing = E$
2. Dos conjuntos que tienen el mismo complemento con relación al mismo conjunto son iguales

$$C'A = C'B \Leftrightarrow A = B$$

En efecto, si $C'A = C'B$ entonces $C'(C'A) = C'(C'B) \Rightarrow A = B$

3. Si $A \subset B$, entonces el complemento de B está incluido en el complemento de A (con relación al mismo conjunto E).

En efecto, si $x \in C'B \Rightarrow x \notin B$; $A \subset B$ y $x \notin B$, implica que $x \notin A$. (Contra reciproco) de $(x \in A \Rightarrow x \in B)$); entonces $x \in C'A$.

.

$$A \subset B \Rightarrow C'B \subset C'A$$

Esto es la traducción de la equivalencia lógica

$$[(p) \Rightarrow (q)] \Leftrightarrow [(-q) \Rightarrow (-p)]$$

El complemento del complemento es el conjunto original.

Ejemplos:

1. Si $E = \{1, 2, 3\}$ y $A = \{1, 2\}$ entonces $A' = \{3\}$
2. Tomemos a $U = \{1, 2, 3, 4, ...\}$, los enteros positivos, como conjunto universal. Sean $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6, 7\}$ y $E = \{2, 4, 6, 8, ...\}$ los números pares.

Entonces:

$$A' = \{5, 6, 7, 8,...\}, \quad B' = \{1, 2, 8, 9, 10,...\} \quad y \quad E' = \{1, 3, 5, 7,...\}$$

3. Sea

   $U = \{1, 2, 3, 4,...,8, 9\}, \quad A = \{1, 2, 3, 4, 5\}, \quad B' = \{4, 5, 6, 7\} \quad y \quad E' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

   Encontrar: A', B' y E'.

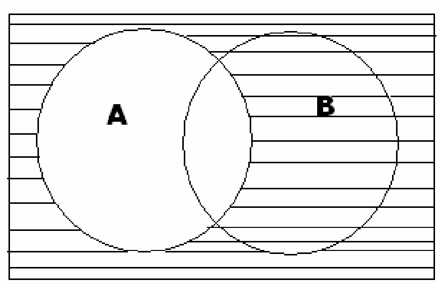
$$A' = \{6, 7, 8, 9\}$$

$$B' = \{1, 2, 3, 8, 9\}$$

$$E' = \{2, 4, 6, 8\}$$

Ejemplos resueltos:

1. En el diagrama de Venn se ha rayado el complemento de A, o sea el área exterior de A. se supone que el conjunto universal U es el área del rectángulo.



2. Suponiendo que el conjunto universal U sea el alfabeto, dado $T = \{a, b, c\}$, entonces:

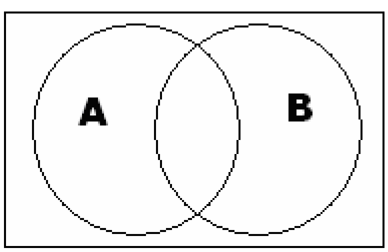
   El complemento de $T' = \{d, e, f, g, h,.....\}$

Ejemplos propuestos:

1. Sea $U=\{1,2,3,4,\ ......,8,9\}$, $A=\{1,2,3,4\}$, $B=\{2,4,6,8\}$, $C=\{3,4,5,6\}$. Hallar:
   a) A'
   b) B'
   c) $(A\cap C)'$
   d) $(A\cup B)'$
   e) $(A')'$
   f) $(B-C)'$

2. En el diagrama de Venn, rayar:

   a) B'
   b) $(A\cup B)'$
   c) $(B-A)'$
   d) $A'\cap B'$



Soluciones:

1.
   a) $A'=\{5,6,7,8,9\}$
   b) $B'=\{1,3,5,7,9\}$
   c) $(A\cap C)'=\{1,2,5,6,7,8,9\}$

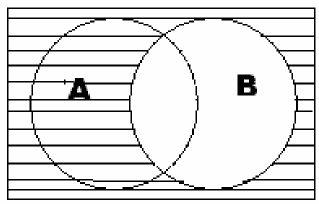
d) $(A \cup B)' = \{5,7,9\}$

e) $(A')' = A$

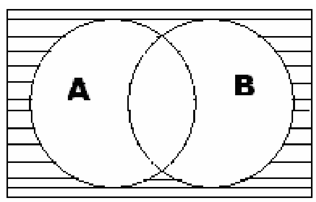
f) $(B - C)' = \{1,3,4,5,6,7,9\}$

2.

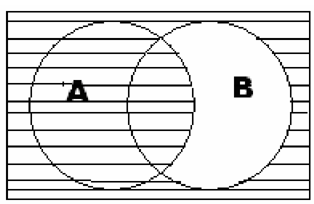
a)



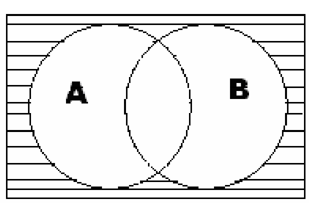
b)



c)



d)



DIFERENCIA

La diferencia de los conjuntos A y B es el conjunto de elementos que pertenecen a, pero no a B. Se denota la diferencia de A y B por:

$$A - B$$

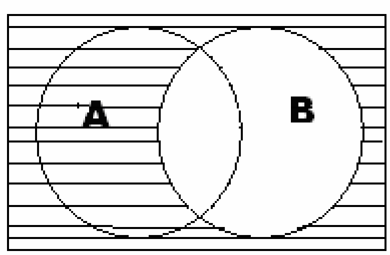
que se lee “ A diferencia B ” o simplemente “ A menos B ”. A veces la diferencia de A y B se denota por A/B o por A $\sim$ B.

Ejemplos:

1. Sea $S = \{a, b, c, d\}$ y $T = \{f, b, d, g\}$. Se tiene:

   $S - T = \{a, c\}$

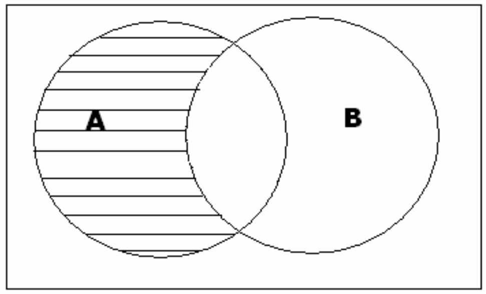
2. En el diagrama de Venn se ha rayado $A - B$, el área de A que no es parte de B.



Lo Rayado es $A - B$

Ejemplos resueltos:

1. En el diagrama de Venn se ha rayado A-B, el área de A que nos es parte de B.



2. Sean $S=\{a,b,c,d\}$ y $T=\{f,b,d,g\}$. Se tiene:

$$S-T=\{a,c\}$$

3. Sea R el conjunto de los números reales y Q el conjunto de los números racionales. Entonces R-Q es el conjunto de los números irracionales.

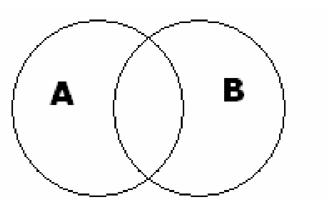
La diferencia de A y B se puede también definir concisamente como:

$$A-B=\{x \mid x\in A \ \text{y} \ x\notin B\}$$

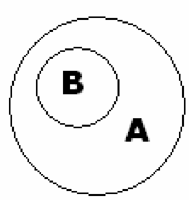
Ejemplos propuestos:

1. En los diagramas de Ven rayar A menos B, o sea A - B

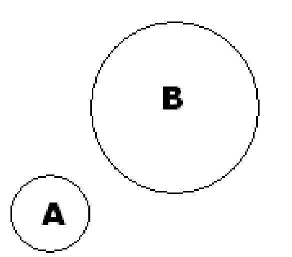
a)



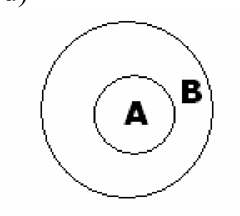
b)



c)



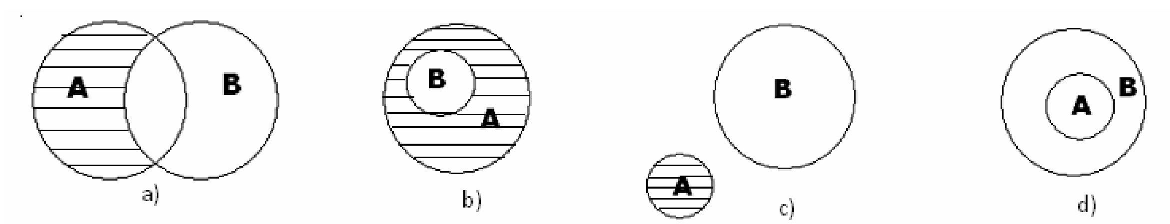
d)



2. Sea $A = \{1,2,3,4\}$, $B = \{2,4,6,8\}$, $C = \{3,4,5,6\}$. Hallar:
   a) $(A - B)$
   b) $(C - A)$
   c) $(B - C)$
   d) $(B - A)$
   e) $(B - B)$

Soluciones:

1. En cada caso el conjunto A- B cosiste en los elementos de A que no estan en B, es decir, el área de A que no esta en B.



Nótese que, en c) $A - B = A$, si A y B son disjuntos.

Nótese también que, en d) $A - B = \varnothing$ si A es subconjunto de B.

2.

a) El conjunto $A - B$ consiste en los elementos de A que no están en B. Como $A = \{1, 2, 3, 4\}$ y $2, 4 \in B$ entonces $A - B = \{1, 3\}$.

b) Los únicos elementos de C que no están en A son 5 y 6; por lo tanto $C - A = \{5, 6\}$.

c) $B - C = \{2, 8\}$

d) $B - A = \{6, 8\}$

e) $B - B = \varnothing$

Objetivo 7. Recordarás la operación producto cruz, cardinalidad y potencia de conjuntos y sus propiedades.

CONJUNTO POTENCIA

La familia de todos los subconjuntos de un conjunto S se le llama conjunto potencia de S. Se le designa por

$$2^S$$

Ejemplo:

Si M= {{a,b}} entonces,

2^M = {{a,b},{a},{b},Φ}

Si un conjunto S es finito, digamos que S tenga n elementos, entonces le conjunto potencia de S tendrá 2^n elementos, como se puede demostrar. Esta es una razón para llamar conjunto de potencia de S la clase de los subconjuntos de S y para denotarla por 2^s.

Ejemplos resueltos:

1. Determine el conjunto potencia P(S) de $S = \{a,b,c,d\}$ los elementos de P(S) son subconjuntos S. Así que:

   $P(S) =$

   $$\left[S,\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\varnothing\right]$$

Observa que P(S) tiene $2^4 = 16$ elementos.

2. Hallar el conjunto potencia 2^s del conjunto $S = \{3, \{1,4\}\}$

   Observar primero que S contiene dos elementos, 3 y el conjunto $\{1,4\}$. Por tanto,

   2^s contiene $2^2 = 4$ elementos los cuales son:

   $2^s = \{S, \{3\}, \{\{4\}\}, \varnothing\}$

Ejemplos propuestos:

1. Encuentre el conjunto potencia, P(S), de $S = \{1,2,3,4,5\}$

2. Entre las afirmaciones siguientes decir cual es la correcta y cual incorrecta. Aquí S es un conjunto no vacío.

$$(a)\ S \in 2^s$$

$$(b)\ S \subset 2^s$$

$$(c)\ \{S\} \in 2^s$$

$$(d)\ \{S\} \subset 2^s$$

Soluciones:

1.

$$\begin{aligned} P(S) = [&\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1,2\}, \{1,3\}, \{1,4\}, \{1,5\}, \\ &\{2,3\}, \{2,4\}, \{2,5\}, \{3,4\}, \{3,5\}, \{4,5\}, \{1,2,3\}, \\ &\{1,2,4\}, \{1,2,5\}, \{2,3,4\}, \{2,3,5\}, \{3,4,5\}, \{1,3,4\}, \\ &\{1,3,5\}, \{1,4,5\}, \{2,4,5\}, \{1,2,3,4\}, \{1,2,3,5\}, \\ &\{1,2,4,5\}, \{1,3,4,5\}, \{2,3,4,5\}, S] \end{aligned}$$

Hay $2^5 = 32$ conjuntos en P(S)

2.

(a) Correcto

(b) Incorrecto

(c) Incorrecto

(d) Correcto

CONJUNTO PRODUCTO CRUZ

Dados dos conjuntos A y B, se le llama conjunto producto de A y B el conjunto de todos los pares ordenados (a, b) con a Є A y b Є B. Se le denota por:

$$A \times B$$

Esto se lee “A cruz B”. Más breve,

A x B= {(a, b) | a Є A, b Є B}

El conjunto producto A x B se le llama también producto cartesiano de A y B , por el matemático Descartes, quien, en el siglo diecisiete fue el primero en investigar el conjunto R x R. También, por la misma razón, se llama plano cartesiano a la representación de R x R.

Ejemplos:

1. Sean A= {1, 2, 3} y B= {a, b}

   $A \text{ x } B = \{(1,a),\ (1,b),\ (2,a),(2,b),(3,a),(3,b)\}$

2. Dado $A = \{1,\ 2\},\ B = \{x,\ y,\ z\}$ y $C = \{3,\ 4\}$. Encontrar A x B x C.

   $A \text{ x } B \text{ x } C = \{(1,x,3),\ (1,x,4),\ (1,y,3),(1,y,4),(1,z,3),(1,z,4),(2,x,3),\ (2,x,4),\ (2,y,3),(2,y,4),(2,z,3),(2,z,4)\}$

Ejemplos resueltos:

1. Sean $W = \{\text{Juan}, \text{Josue}, \text{Ernesto}\}$ y $V = \{\text{Maria}, \text{Carmen}\}$. Hallar W x V.

   W x V consiste en todos los pares ordenados (a, b) en los que $a \in W$ y $b \in V$.

   Por tanto:

$$W \text{ x } V = \{(\text{Juan},\text{Maria}),(\text{Juan},\text{Carmen}),(\text{Josue},\text{Maria}),(\text{Josue},\text{Carmen}),(\text{Ernesto},\text{Maria}),(\text{Ernesto},\text{Carmen})\}$$

2. Sean $A = \{a,b\},\quad B = \{2,3\},\quad C = \{3,4\}$ Hallar:

   (a) $A \text{ x } (B \cup C)$
   (b) $(A \text{ x } B) \cup (A \text{ x } C)$
   (c) $A \text{ x } (B \cap C)$
   (d) $(A \text{ x } B) \cap (A \text{ x } C)$

   (a) $A \text{ x } (B \cup C)$

   Se averigua primero $B \cup C = \{2,3,4\}$. Entonces:

   $A \text{ x } (B \cup C) = \{(a,2),(a,3),(a,4),(b,2),(b,3),(b,4)\}$

   (b) $(A \text{ x } B) \cup (A \text{ x } C)$

   Calcular primero $A \text{ x } B$ y $A \text{ x } C$:

$A \times B = \{(a,2),(a,3),(b,2),(b,3)\}$
$A \times C = \{(a,3),(a,4),(b,3),(b,4)\}$

Ahora la unión de los conjuntos:

$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(a,2),(a,3),(b,2),(b,3),(a,4),(b,4)\}$

Los ejercicios (a) y (b) muestran que:

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

(c) $A \times (B \cap C)$

Calcular primero $B \cap C = \{3\}$.Entonces:

$A \times (B \cap C) = \{(a,3),(b,3)\}$

(d) $(A \times B) \cap (A \times C)$

En (b) se calcularon A x B y A x C. La intersección de A x B y A x C es el conjunto de los pares ordenados que pertenecen a ambos conjuntos, es decir,

$(A \times B) \cap (A \times C) = \{(a,3),(b,3)\}$

Por lo que (c) y (d) muestran que:

$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$

Ejemplos propuestos:

1. Sean $A = \{1,2,3\}$, $B = \{2,4\}$, $C = \{3,4,5\}$. Hallar A x B x C

2. Sean $A = \{\text{Marcos, Eva, Pablo}\}$, $B = \{\text{Eva, David}\}$. Encuentre:

   a) $A \times B$

   b) $B \times A$

   c) $B \times B$

3. Sean $X=\{a,b,c\}$, $Y=\{b,c,d\}$ y $Z=\{a,d\}$. Encontrar $X \times Y \times Z$.

Soluciones:

1.

$$\begin{aligned}A \times B=\{&(1,2,3),(1,2,4),(1,2,5),(1,4,3),(1,4,4),(1,4,5),\\&(2,2,3),(2,2,4),(2,2,5),(2,4,3),(2,4,4),(2,4,5),\\&(3,2,3),(3,2,4),(3,2,5),(3,4,3),(3,4,4),(3,4,5)\}\end{aligned}$$

2.

$$A \times B=\{(\text{Marcos},\text{Eva}),(\text{Marcos},\text{David}),(\text{Eva},\text{Eva}),(\text{Eva},\text{David}),(\text{Pablo},\text{Eva}),(\text{Pablo},\text{David})\}$$

$$B \times A=\{(\text{Eva},\text{Marcos}),(\text{David},\text{Marcos}),(\text{Eva},\text{Eva}),(\text{David},\text{Eva}),(\text{Eva},\text{Pablo}),(\text{David},\text{Pablo})\}$$

$$B \times B=\{(\text{Eva},\text{Eva}),(\text{Eva},\text{David}),(\text{David},\text{Eva}),(\text{David},\text{David})\}$$

3.

$$X \times Y \times Z=\left\{\begin{matrix}(a,b,a),\ (a,b,d),\ (a,c,a),\ (a,c,d),\ (a,d,a),\ (a,d,d),\\(b,b,a),\ (b,b,d),\ (b,c,a),\ (b,c,d),\ (b,d,a),\ (b,d,d),\\(c,b,a),\ (c,b,d),\ (c,c,a),\ (c,c,d),\ (c,d,a),\ (c,d,d)\end{matrix}\right\}$$

EJERCICIOS GENERALES DE CONJUNTOS

Sea U = {x l x es un numero entero comprendido entre 1 y 100 inclusive}.
A = {x l x es un numero entero comprendido entre 1 y 100 inclusive}
B = {x l x es un numero entero comprendido entre 1 y 100 inclusive}
$C = \{1,2,3\}$

$D = \{4,7,8,9\}$

Calcula

1. $A \cap C$
2. $B \cup D$
3. $(A \cup B)'$
4. $(A \cup B') - C$
5. $(D - A)' \cap C$
6. $(B' \cap A')'$
7. $(A \cap D) \cup B$
8. $(C - B') - (B - C)'$
9. $(A \cup B)' \cap C'$
10. $A' - B'$

b) Sea

$U = \{1,2,3,4,5\}$,

$A = \{1,5\}$,

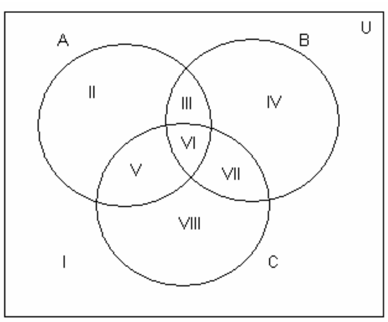
$B = \{1,4,5\}$

$C = \{1,2,4\}$

Usando los conjuntos anteriores, demuestra que los siguientes conjuntos son iguales:

1. $(A \cap C) \cap B \quad y \quad (B \cap A) \cap C$
2. $A \cap (B \cap C) \quad y \quad (A \cap B) \cup (A \cap C)$
3. $A \cup (B \cap C) \quad y \quad (A \cup B) \cap (A \cup C)$
4. $B \cap (B \cup C) \quad y \quad B$
5. $C \cup (C \cap A) \quad y \quad C$
6. $(A \cup B)' \quad y \quad A' \cap B'$
7. $(A \cap C)' \quad y \quad A' \cup C'$
8. $A - B \quad y \quad A \cap B'$
9. $C - B \quad y \quad C \cap B'$
10. $(A - B) - C \quad y \quad (A \cap B') \cap C'$

DIAGRAMAS DE VENN



1. ¿Cuál es el número que representa, el área común a los tres conjuntos?
2. ¿Qué números comprenden el conjunto A?
3. ¿Qué números comprende el conjunto B?
4. ¿Qué números comprende el conjunto C?
5. Los números que constituyen C’ son:

6. Enumera los números que constituyen A’:

7. Enumera los que constituyen B’:

8. ¿Por qué números está representado $A \cup B$?

9. ¿Por qué números está representado ($A \cup B$)’, el área exterior a $A \cup B$?

10. ¿Qué conjunto constituyen las regiones enumeradas II, III, IV, V, VI, VII, VIII?

11. ¿Por qué numero está representada el área exterior al conjunto $A \cup B \cup C$, es decir, _______________?

12. Los números __________ y _________ representan el conjunto $A \cap B$

13. ¿Qué conjunto representan V y VI?

14. ¿Por qué números está representado ($B \cap C$)’?

15. A’ está representada por los números

16. ¿Qué zonas numeradas representan al conjunto B?

17. Por tanto $A' \cap B$, la zona común a los conjuntos A' y B está representada por los números

18. ¿Por qué zonas numeradas está representado en conjunto C?

19. Entonces, $A - B$,el área que está en A pero no en B, está representada por los números:

20. C', la zona exterior al conjunto ________ está representada por los números:

21. Por tanto, $(A - B) \cap C'$, el área común a $A - B$ y C', se denota por el numero: