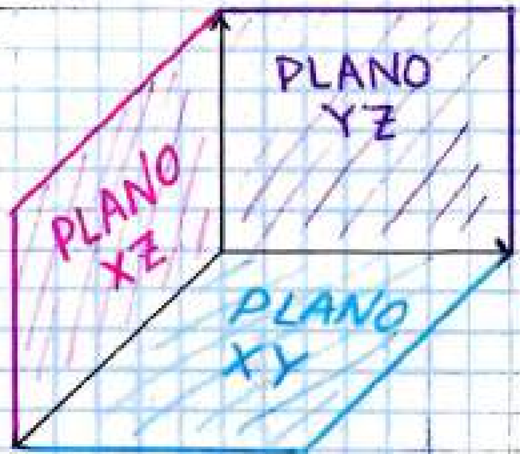
22 marzo 2018.

TRAZADO DE PLANOS EN EL ESPACIO.

$\Pi_1 \cap \Pi_2 \neq \emptyset \longrightarrow$ En general $\underbrace{\boxed{\Pi_1}}_{}$ $\cap$ $\boxed{\Pi_2} = \mathcal{L}$

PLANO DADO — PLANO COORDENADO — TRAZA



EJEMPLO

CASO 1 $ax + by + cz + d = 0$; $a, b, c, d \neq 0$.

$\Pi_1 = \boxed{3x + 2y + 4z = 12}$

- TRAZA XY $\Rightarrow$ $z = 0$. $\longrightarrow$ Recta $\boxed{3x + 2y = 12}$ ($\Pi_1 \cap \Pi_{XY}$)

  - $y = 0$
  - $3x = 12$

    $x = \frac{12}{3}$

    $x = 4$

  $\boxed{P_1 = (4, 0, 0)}$

- TRAZA XZ $\Rightarrow$ $y = 0$ $\longrightarrow$ Recta $\boxed{3x + 4z = 12}$ ($\Pi_1 \cap \Pi_{XZ}$)

  - $x = 0$
  - $4z = 12$

    $z = \frac{12}{4}$

    $z = 3$.

  $\boxed{P_2 = (0, 0, 3)}$

22-marzo-2018.

$\Pi_1 \cap \Pi_{YZ}$

- TRAZA YZ $\Rightarrow$ $x=0$ $\longrightarrow$ Recta: $\boxed{2y + 4z = 12}$

• $z=0$

• $2y = 12$

$y = \frac{12}{2}$

$y = 6.$

$\boxed{P_3 = (0, 6, 0)}$

CASO 2 → Alguna variable ausente, a, b, c = 0.

- $a = 0$; $by + cz + d = 0$ $\rightarrow$ $\pi \parallel$ Eje x
- $b = 0$; $ax + cz + d = 0$ $\rightarrow$ $\pi \parallel$ Eje y
- $c = 0$; $ax + by + d = 0$ $\rightarrow$ $\pi \parallel$ Eje z.

Planos

CASO 3 → Dos variables ausentes.

- $a, b = 0$; $cz + d = 0$ $\rightarrow$ $\pi \parallel \pi_{XY}$
- $a, c = 0$; $by + d = 0$ $\rightarrow$ $\pi \parallel \pi_{XZ}$
- $b, c = 0$; $ax + d = 0$ $\rightarrow$ $\pi \parallel \pi_{YZ}$

Planos.

22 · marzo · 2018 .

- EJERCICIO

a) $3x - 9y + 24z + 2 = 0$

b) $5x - 10y = 0$ → $x = 0 \rightarrow -10y = 0 \quad y = 0$; $y = 0 \rightarrow 5x = 0 \quad x = 0$ $\boxed{P = (0,0,0)}$

c) $x = 0$

d) $y + 5z = 10$ → Paralelo al eje X.

e) $4x - 6y + 2z - 1 = 0$

a) TRAZA XY → $z = 0$ → $3x - 9y = -2$

$\boxed{P_1 = (-2/3, 0, 0)}$ • $y = 0$ • $3x = -2$, $x = \frac{-2}{3}$

TRAZA XZ → $y = 0$ → $3x + 24z = -2$

$\boxed{P_2 = (0, 0, -1/12)}$ • $x = 0$ • $24z = -2$, $z = \frac{-2}{24}$, $z = -1/12$

TRAZA YZ → $x = 0$ → $-9y + 24z = -2$

$\boxed{P_3 = (0, 2/9, 0)}$ • $z = 0$ • $-9y = -2$, $y = \frac{-2}{-9}$, $y = 2/9$

b) El plano es paralelo al eje de las Y's

c) El plano es paralelo al plano YZ

d) $y + 5z = 10$ $\quad y = 0 \quad 5z = 10$, $z = \frac{10}{5}$, $z = 2$

$\boxed{P_1 = (0, 0, 2)}$

$\boxed{P_2 = (0, 10, 0)}$ $\quad z = 0 \quad y = 10$

22 · marzo · 2018.

e) $x=0 \longrightarrow -6y+2z=1 : \; y=0 \quad 2z=1 \rightarrow z=1/2$

$y=0 \longrightarrow 4x+2z=1 : \; z=0 \quad 4x=1 \rightarrow x=1/4$

$z=0 \longrightarrow 4x-6y=1 : \; x=0 \quad -6y=1 \rightarrow y=-1/6$

$\boxed{P_1=(0,0,1/2)} \quad \boxed{P_2=(1/4,0,0)} \quad \boxed{P_3=(0,-1/6,0)}$

22. marzo. 2018

INTERSECCIÓN DE UNA RECTA Y UN PLANO

- Una recta $\mathcal{L}$ es paralela a un plano π, si $\mathcal{L}$ es ORTOGONAL a una normal a π.

- Si la recta $\mathcal{L}$ es PARALELA al plano π, entonces $\mathcal{L} \subset \pi$, o bien, $\mathcal{L} \cap \pi = \emptyset$.

Si $\mathcal{L}$ NO es PARALELA a π, entonces $\mathcal{L} \cap \pi = P_0$

EJERCICIO pág. 77. Haaser.

Encuentre la intersección de una recta $\mathcal{L} = \{(1,1,1) + t(2,-1,3) : t \in \mathbb{R}\}$ y el plano cuya ecuación es $2x + 3y - z = 7$

$$\mathcal{L} = \begin{cases} x = 1 + 2t \\ y = 1 - t \\ z = 1 + 3t \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{matrix} \Rightarrow r(t) = \langle 1+2t,\ 1-t,\ 1+3t \rangle$$

VECTOR POSICIÓN

$\boxed{t = \text{tiempo}}$

→ Necesitamos hallar un tiempo específico donde se $\cap$ la $\mathcal{L}$ y π

$$r(t) \cdot \vec{n} = \langle 1+2t,\ 1-t,\ 1+3t \rangle \cdot \langle 2, 3, -1 \rangle = 7$$

ya lo tenemos

$\vec{n} = \langle 2, 3, -1 \rangle$

sale de

$2x + 3y - z = 7$

$$2 + 4t + 3 - 3t - 1 - 3t = 7$$
$$4 - 2t = 7$$
$$-2t = 7 - 4$$
$$-2t = 3$$
$$\boxed{t = \frac{3}{2}}$$

Ahora $\langle 1+2t,\ 1-t,\ 1+3t \rangle$ se sustituye en el vector posición

$$\rightarrow P = \left(1 + 2\left(-\tfrac{3}{2}\right),\ 1 - \left(-\tfrac{3}{2}\right),\ 1 + 3\left(-\tfrac{3}{2}\right)\right)$$

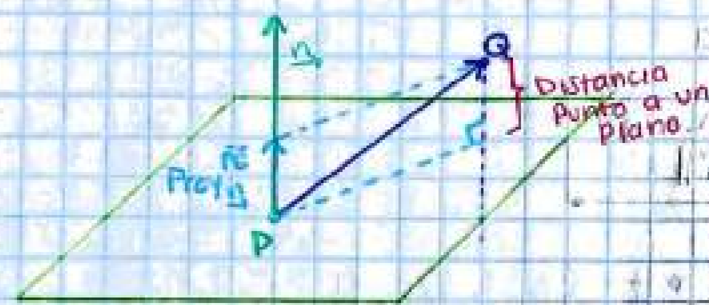
$$\boxed{P = \left(-2,\ \frac{5}{2},\ \frac{-7}{2}\right)}$$

DISTANCIA

3-abril-2018.

Punto a un Plano

- La distancia de un punto Q a un plano π es la distancia de Q al punto de intersección con π de la recta que pasa por Q y es normal a π.



$$\boxed{\text{Distancia} = \left\| \text{Proy}_{\vec{n}} \overrightarrow{PQ} \right\|}$$

$$= \left\| \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|} \left(\frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right) \right\| = \left\| \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\| \underbrace{\left\| \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\|}_{\text{Vector unitario}} = \left\| \frac{\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}}{\|\vec{n}\|} \right\| = \boxed{\frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}}$$

Distancia

EJERCICIOS pág 805 Larson

- Calcule la distancia del punto $Q(1, 5, -4)$ al plano dado por $3x - y + 2z = 6$

$\rightarrow$ Para hallar P ; $x = 0$, $y = 0$, $z = \frac{6}{2} = 3$

$\therefore P = (0, 0, 3)$

Así, $\overrightarrow{PQ} = (1, 5, -4) - (0, 0, 3) = \langle 1, 5, -7 \rangle$

De $3x - y + 2z = 6$, deducimos que $\vec{n} = \langle 3, -1, 2 \rangle$ y que $\|\vec{n}\| = \sqrt{9 + 1 + 4} = \sqrt{14}$

Entonces: $D = \frac{|\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|} = \frac{|\langle 1, 5, -7 \rangle \cdot \langle 3, -1, 2 \rangle|}{\sqrt{14}} = \frac{|-16|}{\sqrt{14}} = \boxed{\frac{16}{\sqrt{14}}}$

3 abril 2018.

→ Otra alternativa para resolver el ejercicio anterior

$Q = \langle 1, 5, -4 \rangle \qquad \vec{n} = \langle 3, -1, 2 \rangle$

$d = 6 \longrightarrow$ Sale de $\pi \{ 3x - y + 2z = 6 \} \to \boxed{ax + by + cz = d}$

Distancia

$$\boxed{D = \frac{|d - \vec{n} \cdot \vec{Q}|}{\|\vec{n}\|}}$$

$$D = \frac{|6 - [\langle 3, -1, 2 \rangle \cdot \langle 1, 5, -4 \rangle]|}{\sqrt{14}}$$

$$D = \frac{|6 - [3 - 5 - 8]|}{\sqrt{14}}$$

$$D = \frac{|6 - [-10]|}{\sqrt{14}}$$

$$D = \frac{|6 + 10|}{\sqrt{14}}$$

$$\boxed{D = \frac{16}{\sqrt{14}}}$$

Mismo resultado que con la otra fórmula.

3 · abril · 2018.

Pág. 806 Larson.

- Hallar la distancia entre los dos planos paralelos dados por

$\pi_1 \quad 3x - y + 2z = 6$
$\pi_2 \quad 6x - 2y + 4z = -4$

$\vec{n_1} = \langle 3, -1, 2 \rangle \qquad \vec{n_2} = \langle \underset{a}{6}, \underset{b}{-2}, \underset{c}{4} \rangle$

– Hallamos un $Q \in \pi_1$; $y = 0,\ z = 0,\ 3x - 6 = 0$

$x = \frac{6}{3}$

$x = 2$

$\therefore Q = (2, 0, 0)$

– Entonces usamos la fórmula $\frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$a, b, c \in \pi_2$, porque Q lo obtuvimos de π_1

$$D = \frac{|6(2) - 2(0) + 4(0) + 4|}{\sqrt{6^2 - 2^2 + 4^2}}$$

$$D = \frac{|12 + 4|}{\sqrt{36 + 4 + 16}}$$

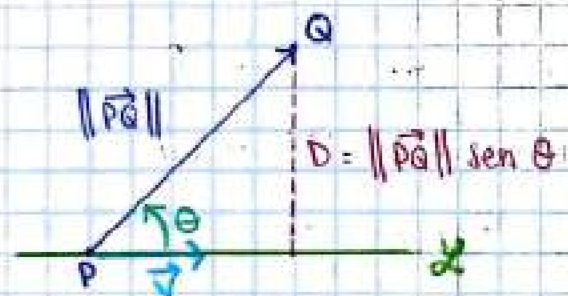
$$D = \frac{|16|}{\sqrt{56}} \longrightarrow \sqrt{56} = \sqrt{2^2 \cdot 14} = 2\sqrt{14}$$

$$D = \frac{16}{2\sqrt{14}}$$

$$\boxed{D = \frac{8}{\sqrt{14}}}$$

3 abril 2018.

Punto a una Recta



∴ Por otro lado, sabemos que:

$$\|\vec{PQ} \times \vec{v}\| = \|\vec{PQ}\| \, \|\vec{v}\| \text{ sen } \theta$$

$$= \underbrace{\|\vec{PQ}\| \text{ sen } \theta}_{D} \, \|\vec{v}\|$$

$$= D \, \|\vec{v}\|$$

∴ Despejando D:

$$\boxed{D = \frac{\|\vec{PQ} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|}}$$

Distancia

EJERCICIO pag 807 Larson

- Hallar la distancia del punto $Q(3, -1, 4)$ a la recta dada por

$$\mathcal{L} = \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = -2t \\ z = 1 + 4t \end{cases} \quad P = (-2, 0, 1) \rightarrow \text{tomando } t = 0. \quad \vec{v} = \langle 3, -2, 4 \rangle$$

$$\vec{PQ} = (3, -1, 4) - (-2, 0, 1) = \langle 5, -1, 3 \rangle$$

3 abril 2018.

$$\vec{PQ} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 5 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = -4\hat{i} - 10\hat{k} + 9\hat{j} - [-3\hat{k} - 6\hat{i} + 20\hat{j}]$$

$$= -4\hat{i} + 6\hat{i} + 9\hat{j} - 20\hat{j} - 10\hat{k} + 3\hat{k}$$

$$= 2\hat{i} - 11\hat{j} - 7\hat{k}$$

$$= \langle 2, -11, -7 \rangle$$

$$\|\vec{PQ} \times \vec{v}\| = \sqrt{2^2 - 11^2 - 7^2} = \sqrt{4 + 121 + 49} = \sqrt{174}$$

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{3^2 - 2^2 + 4^2} = \sqrt{9 + 4 + 16} = \sqrt{29}$$

$$D = \frac{\|\vec{PQ} \times \vec{v}\|}{\|\vec{v}\|} = \frac{\sqrt{174}}{\sqrt{29}} = \sqrt{6} \approx 2.45u$$