6 Superficies Cuádricas

Así como justificamos el estudio de las cónicas argumentando que son las curvas que siguen de las rectas porque sus ecuaciones son polinomios de segundo grado en dos variables, diremos que las *superficies cuádricas* siguen de los planos (cuyas ecuaciones son polinomios de primer grado en tres variables) porque son el lugar geométrico de los puntos P del espacio cartesiano $\mathbb{R}^3$ cuyas coordenadas (x, y, z) satisfacen una ecuación de segundo grado en tres variables. Esperamos que en este punto el lector ya no se sorprenda ante un argumento tan algebraico, pues hemos estado enfatizando la importancia de hacer una lectura geométrica de las expresiones algebraicas. Por tanto, saquemos algunas conclusiones de esta definición.

Para empezar, y ya que en el Capítulo 4 resolvimos sistemas de ecuaciones, observemos que para obtener la intersección de una de esas superficies con un plano, deberemos resolver el *sistema* formado por una ecuación cuadrática con una ecuación de primer grado, como las siguientes:

$$\begin{aligned}&3x^2 + 5y^2 - z^2 + 2x - 1 = 0\\&x = 0.\end{aligned}$$

Si sustituimos $x = 0$ en la primera ecuación, obtenemos una ecuación que sigue siendo cuadrática pero sólo en dos variables:

$$5y^2 - z^2 - 1 = 0.$$

Nosotros ya sabemos que una ecuación de segundo grado en dos variables es una cónica (una cónica ubicada en el plano correspondiente a la ecuación lineal). Entonces, al resolver el sistema formado por una ecuación cuadrática y otra lineal en tres variables, obtenemos una ecuación de segundo grado en dos variables, es decir, al cortar una superficie cuádrica con un plano se obtiene una cónica.

Ésa es también una buena razón para estudiar las superficies cuádricas: hemos estudiado ya sus posibles intersecciones con planos, llamadas *trazas*, y a partir de eso será relativamente sencillo dibujarlas e imaginarlas.

Las superficies cuádricas también tienen *ecuaciones canónicas*, todas las cuales carecen de términos mixtos, ya sea en xy, yz y zx pues ese tipo de términos no aparecen cuando los ejes coordenados coinciden con los de simetría. Por tanto, procederemos en forma totalmente análoga a como lo hicimos en el caso de las cónicas: obtendremos las ecuaciones canónicas y trazaremos sus gráficas (es indispensable que el lector haga un esfuerzo por lograr un dibujo verídico, es decir bien ubicado en cuanto a ejes y planos de simetría), luego haremos un análisis de las simetrías y extensión de cada una y, finalmente comprobaremos que podemos determinar cuál es el tipo de cuádrica correspondiente a una ecuación cuadrática sin términos mixtos aún sin dibujarla, a partir del análisis de sus coeficientes. Recomendamos consultar el video [R-Ro].

6.1. Cilindros

El tipo más sencillo de superficies cuádricas es aquél en el que sólo aparecen involucradas dos variables o una; ya habíamos discutido en el primer capítulo el significado geométrico del hecho de que una variable no aparezca explícitamente en la condición o condiciones: es libre y, en consecuencia, genera rectas completas paralelas al eje de la variable que falta.

Veamos un ejemplo antes de dar la definición formal de cilindro.

Ejemplo. Para dibujar o imaginar el lugar geométrico de los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ que satisfacen la ecuación

$$\frac{x^2}{3^2} + \frac{z^2}{2^2} = 1$$

hacemos las consideraciones siguientes: si dibujamos en el plano XZ la cónica correspondiente a la ecuación dada, por cada punto $P_0(x_0, 0, z_0)$ de dicha cónica se tiene una recta totalmente contenida en el lugar geométrico: la recta (x_0, y, z_0) paralela al eje Y. Eso se debe a que la variable y no está condicionada y puede tomar cualquier valor si los números x_0 y z_0 satisfacen la ecuación. Cada una de esas rectas es una *generatriz* del *cilindro elíptico* ilustrado en la Figura 6.1. Por tener sólo términos cuadráticos, este cilindro es simétrico respecto a los tres planos coordenados, los tres ejes coordenados y al origen, pero hay muchas más simetrías.

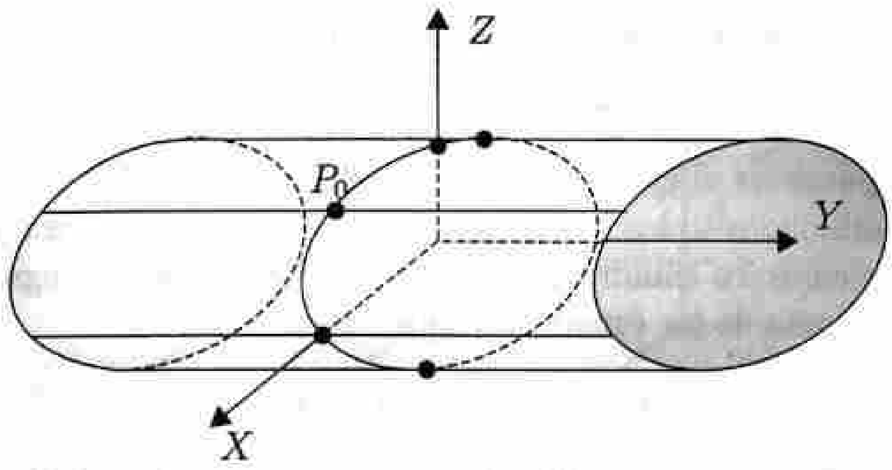


Figura 6.1: Un cilindro elíptico en posición cánonica.

Nótese que el cilindro elíptico puede cortarse por un plano no perpendicular al eje del cilindro; en general, la curva de intersección es otra elipse y aunque las generatrices ya no son perpendiculares al plano de corte, sí siguen siendo paralelas entre sí. Ésa es la condición que define a un cilindro.

Definición. Un *cilindro* es la superficie formada por rectas paralelas cada una de las cuales contiene un punto de una curva plana llamada *directriz del cilindro.* Cada una de las rectas paralelas es una *generatriz del cilindro.*

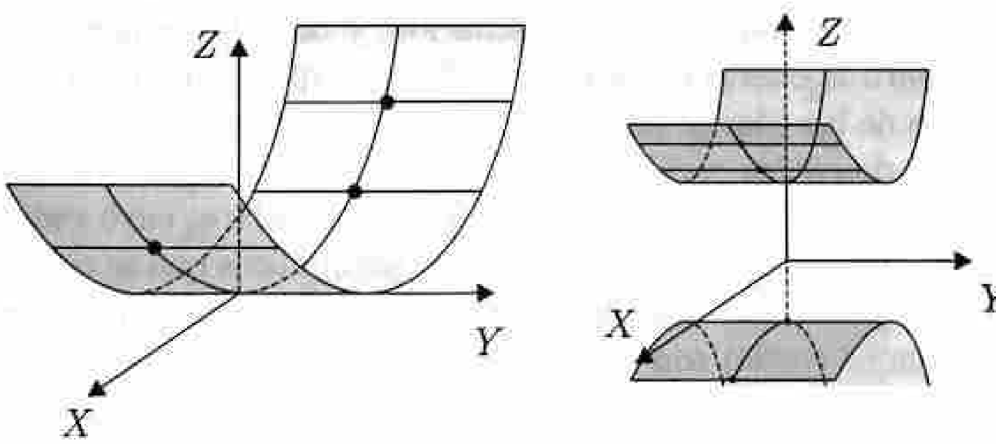


Figura 6.2: Cilindro parabólico y cilindro hiperbólico en posición canónica.

La Figura 6.2 ilustra un cilindro parabólico y otro hiperbólico cuyas ecuaciones son, respectivamente

$$x^2 = 4z \qquad \text{y} \qquad \frac{z^2}{4} - x^2 = 1.$$

También en este caso hemos empezado por trazar, en el plano de las variables que sí aparecen en la ecuación, la cónica correspondiente; es la *traza* del cilindro en ese plano. Luego completamos el cilindro con esa directriz al tomar generatrices paralelas al eje de la variable que falta.

Una vez dibujados todos los tipos cilindros cuya directriz es una cónica no singular, dibujemos los cilindros cuya directriz es una cónica singular, como es el caso de cada una de las ecuaciones siguientes:

$$(y-2)^2+(z+2)^2=0; \quad (z-3)^2=0; \quad x^2-z^2=0; \quad x^2-1=0,$$

correspondientes, respectivamente, a un punto, una recta (doble), un par de rectas que se cortan y un par de rectas paralelas (recuérdese la discusión anterior a la Figura 5.15). Omitimos ecuaciones del tipo $x^2+y^2=-1$ y $x^2=-1$ que corresponden al conjunto vacío, porque los cilindros respectivos también son vacíos, pues si ningún par de primeras coordenadas satisface la condición, no puede haber una tercia de coordenadas que satisfaga esta condición.

Para visualizar los cilindros correspondientes a las ecuaciones dadas, dibujamos en el plano coordenado de las variables involucradas en cada caso (ojo con las ecuaciones segunda y cuarta) la cónica singular respectiva, y por cada uno de los puntos de ese lugar geométrico trazamos una recta paralela al eje que falta. Resulta entonces una sola recta para la primera ecuación, $(2,y,-2)$; un plano (doble), $(x,y,3)$, para la segunda ecuación; dos planos que se cortan, (x,y,x) y $(x,y,-x)$, para la tercera ecuación, y dos planos paralelos, $(1,y,z)$ y $(-1,y,z)$ para la cuarta ecuación. Los dibujos aparecen en la Figura 6.3.

En el caso de las cónicas singulares, vimos que cada una era caso límite de un cierto tipo de cónica regular; lo mismo ocurre para los cilindros con directriz singular: una recta es el límite de cilindros circulares cuyo radio tiende a cero; un plano doble es el límite de cilindros parabólicos que se pegan al plano perpendicular por el eje focal de la parábola directriz al plano de parábola; dos planos que se cortan son el límite de cilindros hiperbólicos que se pegan a los planos perpendiculares por las asíntotas al plano de la hipérbola directriz. Y si el lector resolvió el ejercicio 3 de la sección 5.5, aceptará que dos planos paralelos son caso límite de dos planos que se cortan cuando la recta de intersección se aleja indefinidamente.

Entonces tenemos siete tipos de cilindros cuya ecuación es cuadrática: elípticos, parabólicos, hiperbólicos, una recta, un plano doble, dos planos que se cortan y dos planos paralelos.

La Figura 6.4 muestra cilindros cuyas directrices no son cónicas. En el

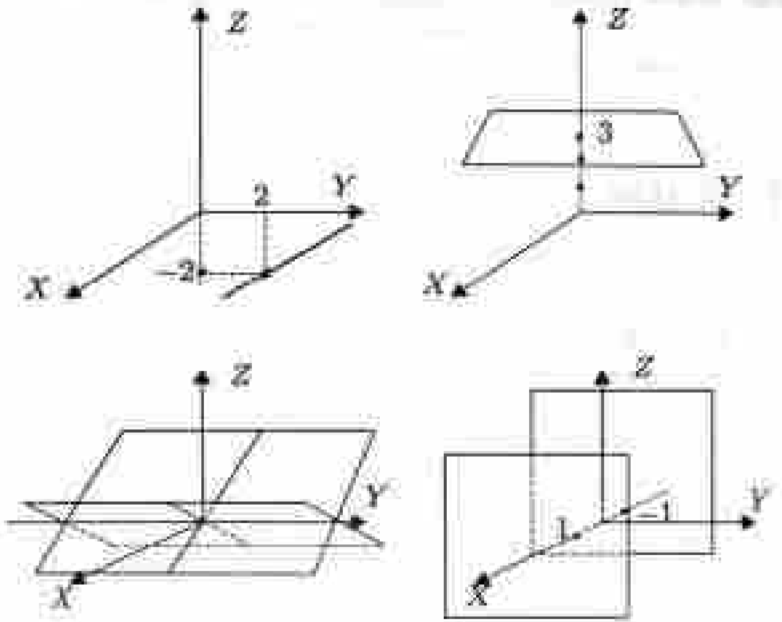


Figura 6.3: Cilindros cuya directriz es una cónica singular.

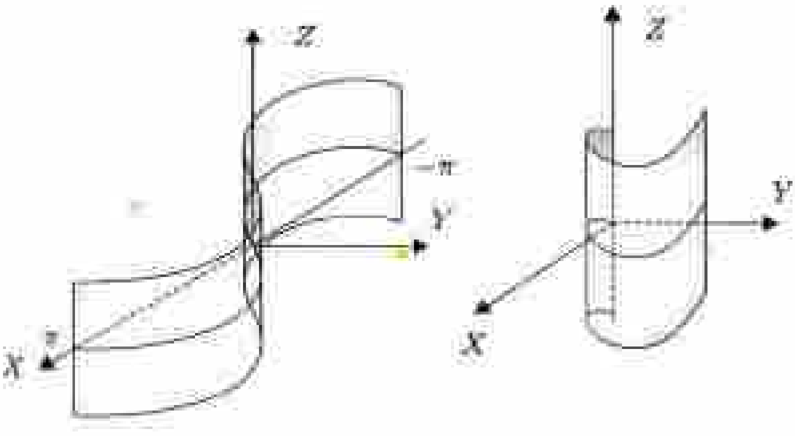


Figura 6.4: Cilindros cuya ecuación no es cuadrática.

primer caso hemos tomado como directriz la gráfica de la función $y = \operatorname{sen} x$, y en el segundo, una de las espirales que obtuvimos al trabajar con curvas en coordenadas polares, $r = \theta$.

EJERCICIOS

1. Dibuje por separado cada uno de los cilindros correspondientes a las ecuaciones siguientes:
   a) $x^2 = y$;
   b) $\frac{x^2}{9} - z^2 = 1$,
   c) $(x + 1)^2 + (z - 2)^2 = 0$,
   d) $(x + 4)^2 = 4$
   e) $y^2 - z^2 = 0$.
2. Dé en cada caso una ecuación para el cilindro propuesto:
   a) un cilindro elíptico cuyo eje sea el eje Y;
   b) un cilindro hiperbólico cuya hipérbola directriz esté contenida en el plano YZ;
   c) un cilindro parabólico cuya parábola directriz esté contenida en el plano XY y cuyo foco sea el punto $(2, 0)$.
3. Demuestre que cualquier cilindro tiene un número infinito de planos de simetría.

6.2. Superficies de revolución

Otra forma sencilla de obtener superficies cuádricas es rotar una cónica en torno a uno de sus ejes de simetría. El lector puede hacer el experimento sencillo de recortar la región de una cartulina acotada por una elipse, o de una parte del plano acotada por una parte de una parábola o entre las dos ramas de una hipérbola, pegar un palito delgado a uno de los ejes y girar la cartulina en torno al palito; la retina se encargará de hacernos ver una cuádrica de revolución.

Nos interesa obtener la ecuación de la superficie de revolución generada por la rotación de una cónica en posición canónica cuando rota en torno a uno

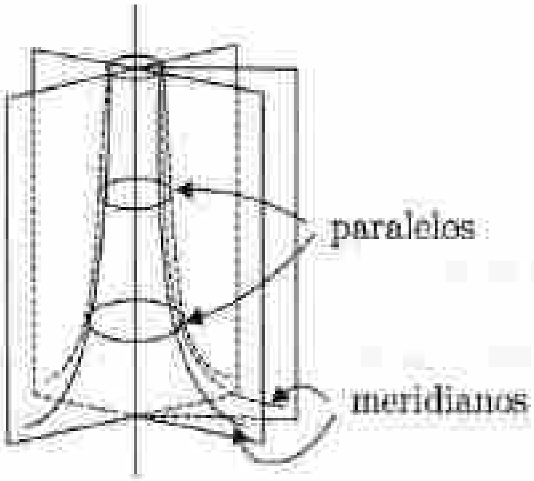


Figura 6.5: Meridianos y paralelos de una superficie de revolución.

de sus ejes de simetría, pero como el método sirve también para obtener la ecuación de la superficie de revolución generada por una curva plana cualquiera contenida en un plano coordenado, haremos las consideraciones en el caso general. Empecemos por la definición.

Definición. Una *superficie de revolución* es la superficie generada al rotar una curva plana en torno a una recta contenida en ese mismo plano.

El lector podría realizar el experimento sugerido antes utilizando la curva que es gráfica de la función seno, ¿conoces algún objeto parecido?

Las distintas posiciones de la curva generatriz se denominan *meridianos* de la superficie de revolución, y las circunferencias descritas por cada uno de los puntos de la curva generatriz se denominan *paralelos* de la superficie de revolución, generalizando así los conceptos de meridiano y paralelo del globo terráqueo.

De la definición y el experimento sugerido es inmediato que una superficie de revolución es simétrica respecto a cualquier plano que pase por el eje de revolución, pues cada meridiano tiene un simétrico respecto a cualquiera de esos planos (véase la Figura 6.5).

Para obtener la ecuación de una superficie de revolución, supondremos que la curva C está contenida en la parte del plano coordenado XZ con $x > 0$, como lo muestra la Figura 6.6, e imaginamos cada plano que contiene al eje Z como una hoja de vidrio que tiene dibujada una curva que coincide con C si la hoja regresa a la posición XZ. Si el ángulo entre ambos planos es θ, podemos llamar a la curva en dicho plano $\mathcal{C}_\theta$ y X_θ a la recta perpendicular al eje Z por el origen. Si la ecuación de la curva original es $f(x,z)=0$, la ecuación de la curva $\mathcal{C}_\theta$ en el plano $X_\theta Z$ es $f(x_\theta,z)=0$ (véase la Figura 6.6).

El punto P_θ, perteneciente a la circunferencia generada por la rotación del punto $P_0(x_0,0,z_0)$, tiene coordenadas (x_θ,z) en el plano $X_\theta Z$ cuya relación con las originales es la siguiente:

$$
\begin{aligned}
z_0 = z &\quad \text{porque la altura respecto al plano } XY \text{ no cambia,}\\
|x_0| = |x_\theta| &\quad \text{porque la distancia al eje } Z \text{ es fija.}
\end{aligned}
$$

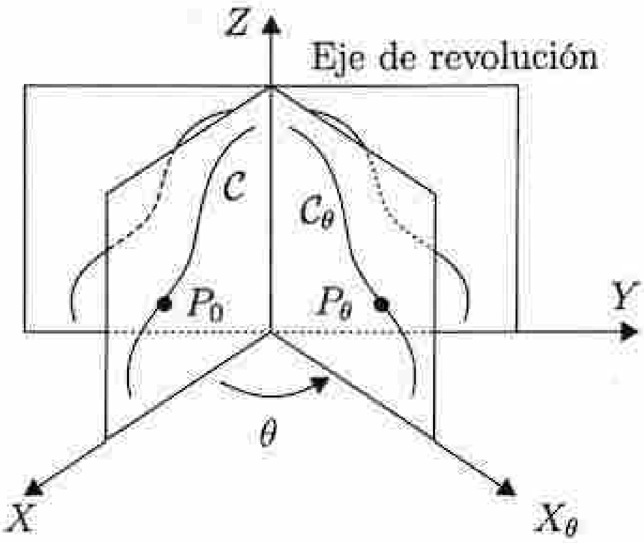


Figura 6.6: Superficie de revolución generada por una curva del plano XZ.

Ahora bien, si pensamos al punto P_θ como un elemento de $\mathbb{R}^3$, le corresponden tres coordenadas (x,y,z) y las dos primeras deben satisfacer

$$\sqrt{x^2+y^2}=|x_\theta|,$$

porque $|x_\theta|$ es la distancia al eje, es decir, el radio de la circunferencia engendrada por el punto $P \in \mathcal{C}$.

Entonces, para obtener la ecuación que satisface cualquier punto en la superficie de revolución, basta efectuar las sustituciones siguientes en la ecuación $f(x,z)=0$ de la curva original

$$z \mapsto z \;\text{ y }\; x \mapsto \sqrt{x^2+y^2}, \tag{6.1}$$

pues lo primero se debe a que cuando el punto P rota en torno al eje Z conserva su altura, z, respecto al plano XY, y lo segundo simplemente expresa el radio de la circunferencia generada por P. En general, podemos decir que la variable correspondiente al eje de rotación se conserva, mientras que la otra variable "introduce" a la variable faltante al expresar la distancia al eje de revolución.

De acuerdo a lo anterior, si la curva $\mathcal{C} \subset XZ$ gira en torno al eje X, las sustituciones deben ser

$$x \mapsto x \ \text{ y } \ z \mapsto \sqrt{z^2 + y^2}, \tag{6.2}$$

porque la situación geométrica es la de la Figura 6.7.

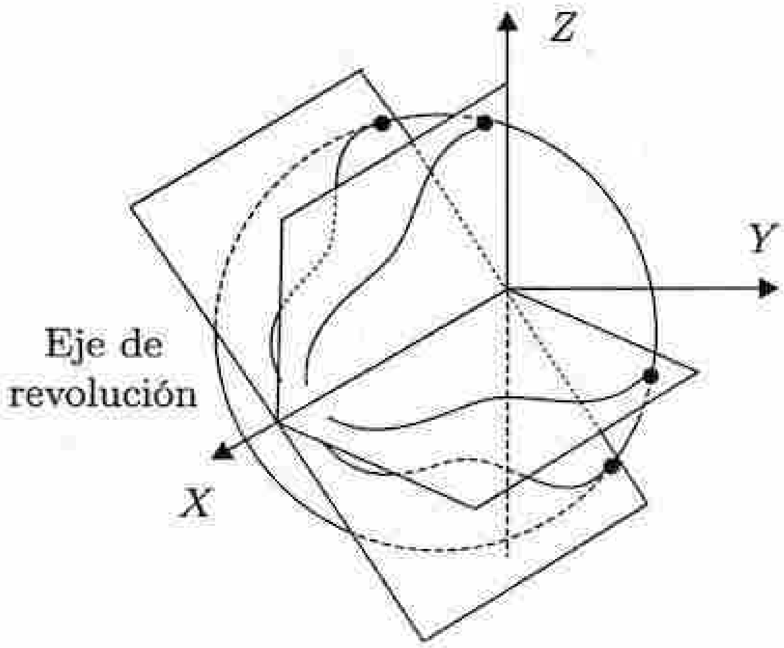


Figura 6.7: Superficie de revolución cuando el eje de rotación es el eje X.

Si la curva está contenida en algún otro plano coordenado, las sustituciones son las indicadas a continuación, dependiendo de cuál sea el eje de rotación:

- Si $\mathcal{C} \subset XY$ y el eje de rotación es el eje X, entonces las sustituciones son

$$x \mapsto x \ \text{ y } \ y \mapsto \sqrt{z^2 + y^2}. \tag{6.3}$$

- Si $\mathcal{C} \subset XY$ y el eje de rotación es el eje Y, entonces las sustituciones son

$$y \mapsto y \ \text{ y } \ x \mapsto \sqrt{x^2 + z^2}. \tag{6.4}$$

- Si $\mathcal{C} \subset YZ$ y el eje de rotación es el eje Y, entonces las sustituciones son

$$y \mapsto y \ \text{ y } \ z \mapsto \sqrt{z^2 + x^2}. \tag{6.5}$$

- Si $\mathcal{C} \subset YZ$ y el eje de rotación es el eje Z, entonces las sustituciones son

$$z \mapsto z \ \text{ y } \ y \mapsto \sqrt{y^2 + x^2}. \tag{6.6}$$

Al comenzar este apartado correspondiente a las superficies de revolución, dijimos que cuando una cónica gira en torno a uno de sus ejes de simetría da lugar a una superficie cuádrica. Bastará obtener las ecuaciones de las superficies con una sustitución del tipo (6.1) anterior para comprobar la afirmación, pero además veremos que cuando una cónica rota en torno a una recta que **no** es un eje de simetría, la ecuación obtenida **no** es de segundo grado.

Obtendremos las superficies cuádricas que nos interesan tomando cónicas en distintos planos coordenados; eso tiene el doble propósito de utilizar cada una de las sustituciones propuestas, y de entrenar al lector en el uso de los distintos ejes coordenados como ejes de revolución.

Elipsoides

Consideremos una elipse en posición canónica en el plano coordenado XZ; la ecuación es entonces

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

y podemos rotarla en torno al eje X o al eje Z. En el primer caso aplicamos la sustitución (6.2), porque la variable del eje de revolución permanece sin cambio; obtenemos

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{(\sqrt{z^2 + y^2})^2}{b^2} = 1,$$

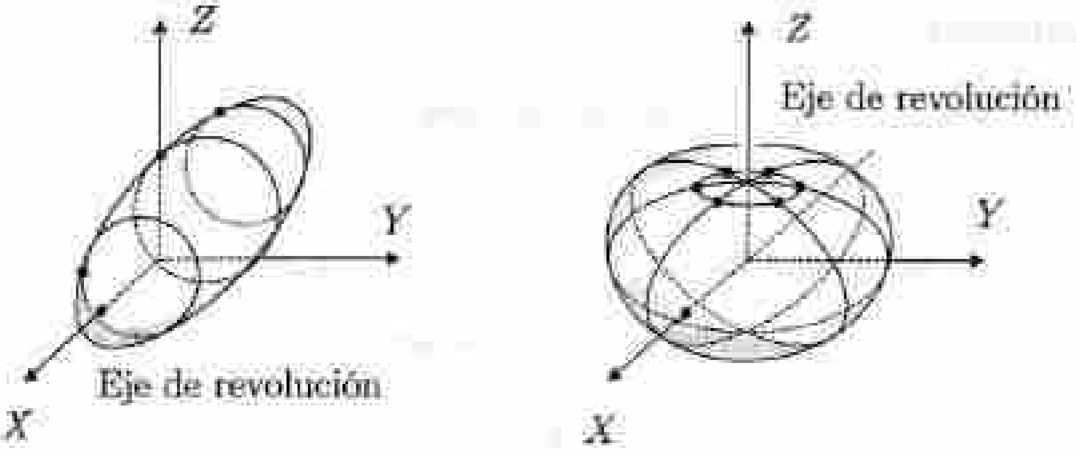
que puede simplificarse así:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2 + y^2}{b^2} = 1,$$

o, mejor,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \tag{6.7}$$

Obsérvese que dos denominadores son iguales; eso se debe a que cuando la elipse ha girado un ángulo de $\pi/2$ en torno al eje X queda ubicada en el plano XY, o bien, a que el corte del elipsoide con el plano $z = 0$ es una elipse congruente con la original. Este elipsoide tiene el aspecto de una sandía, con un



(a) (b)

Figura 6.8: Elipsoides de revolución.

eje de simetría largo y los restantes, perpendiculares al anterior, más pequeños (véase la Figura 6.8(a)).

Cuando el eje de revolución sea el eje menor, correspondiente en este caso al eje Z, la sustitución que se aplica es (6.1) y después de elevar al cuadrado la raíz la ecuación de este elipsoide es

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{a^2}+\frac{z^2}{b^2}=1. \tag{6.8}$$

Este elipsoide tiene el aspecto de una gragea o de una hamburguesa, pues un vértice de la elipse generatriz da lugar a una circunferencia, mientras que el eje menor no se mueve (véase la Figura 6.8(b)).

Desde luego, si la elipse es realmente una circunferencia, el "elipsoide" es una *esfera* y, como todos los denominadores son iguales, la ecuación suele escribirse en la forma

$$x^2+y^2+z^2=r^2. \tag{6.9}$$

Como en el caso de la circunferencia, la esfera es una superficie con muchísimas propiedades geométricas, tanto desde el punto de vista de los conjuntos convexos como del de la Geometría Diferencial y del Cálculo de Variaciones; como en el caso de la circunferencia, nosotros dedicaremos sólo un inciso, el último de este capítulo, para consignar algunas de esas propiedades adicionales a las que incluimos en los ejercicios de esta sección.

Paraboloide

Tomemos ahora una parábola contenida en el plano XY y con ecuación

$$x^2 = 4py,$$

cuyo eje de simetría es el eje Y; usando la sustitución (6.4) resulta

$$x^2 + z^2 = 4py. \tag{6.10}$$

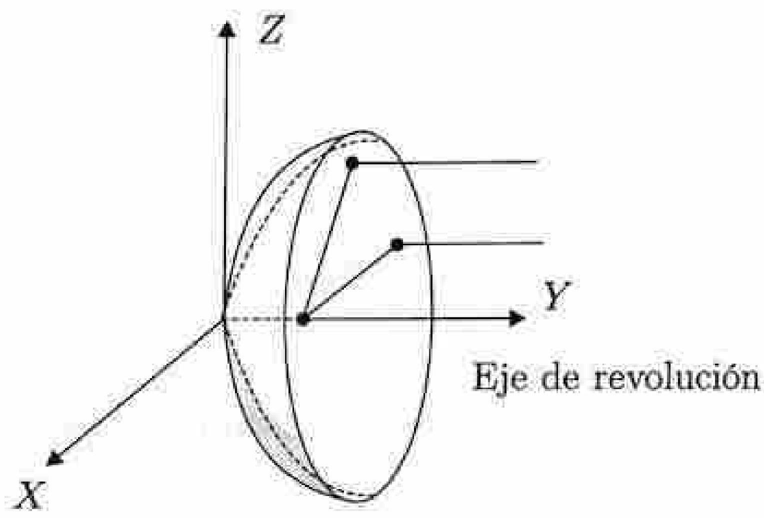


Figura 6.9: Paraboloide de revolución.

El aspecto de un paraboloide de revolución es precisamente el de una antena parábolica; el foco de la parábola original es el foco de todas las parábolas meridianas y en él se concentran los rayos reflejados en el paraboloide provenientes de un satélite artificial (véase la Figura 6.9) que, para efectos prácticos, está en el infinito.

Si rotamos la parábola en torno al eje conjugado, que no es un eje de simetría, se forma una superficie parecida a un cojín circular (infinito) con un botón puntual en el centro (haga un dibujo), que corresponde al vértice de todas las parabolas meridianas. La sustitución que debemos utilizar es la dada por (6.3); entonces resulta

$$x^2 = 4p\sqrt{y^2 + z^2},$$

y para eliminar el radical debemos elevar al cuadrado, lo cual originará un término de cuarto grado en el lado izquierdo. Por tanto, ésta no es una superficie cuádrica.

Hiperboloides

Tomemos ahora una hipérbola en posición canónica en el plano YZ. Si la ecuación es

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

entonces el eje focal es el eje Y y el conjugado, el eje Z. Como ambos son ejes de simetría de la hipérbola, la rotación en torno a cualquiera de ellos dará lugar a una superficie cuádrica. Pero éstas son esencialmente diferentes, como veremos a continuación.

Si rotamos en torno al eje Y, deberemos usar la sustitución (6.5), lo cual da lugar a la ecuación siguiente:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1.$$

Para dibujar el hiperboloide correspondiente a esta situación, conviene observar que las ramas de la hipérbola dan lugar a dos partes ajenas (que no se cortan) del hiperboloide, que de hecho son reflejadas una de la otra respecto al plano XZ. Debido a ello este hiperboloide se denomina *hiperboloide de dos hojas o de dos mantos*, y tiene el aspecto mostrado en la Figura 6.10.

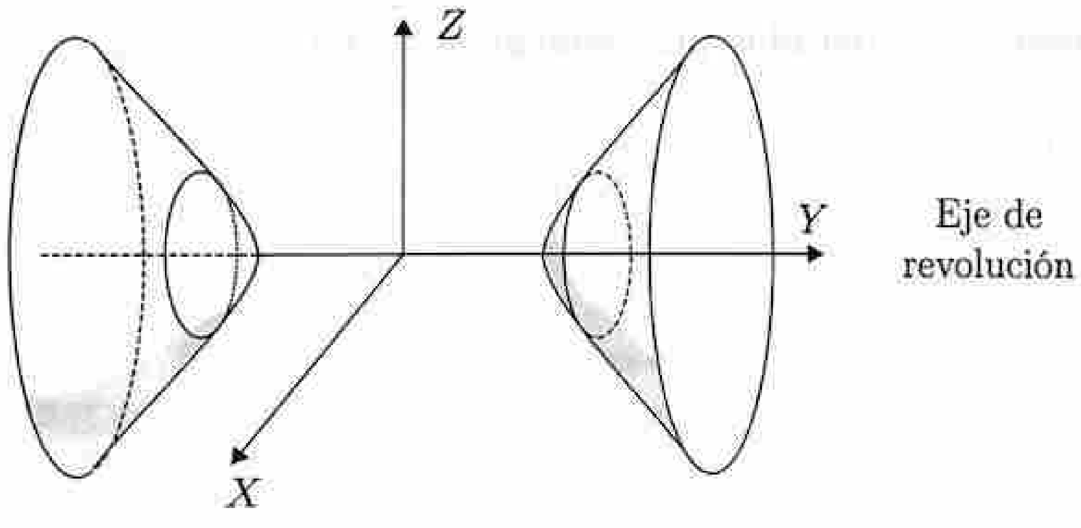


Figura 6.10: Hiperboloide de dos mantos.

Si ahora utilizamos como eje de rotación el eje Z, la sustitución es (6.6) y la ecuación de la superficie es

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1,$$

porque la variable que cambia es y.

Este hiperboloide consta de una sola pieza, porque una rama de la hipérbola alcanza a la otra después de dar media vuelta, por eso se llama *hiperboloide de una hoja o de un manto*, y la figura correspondiente aparece a continuación.

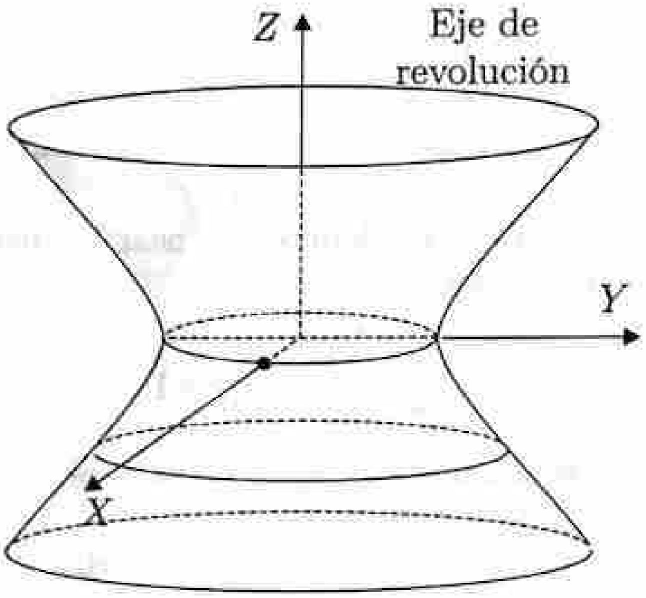


Figura 6.11: Hiperboloide de un manto.

Cuádricas generadas por cónicas singulares

Rotemos ahora las cónicas singulares: un punto, una recta doble, dos rectas que se cortan o dos rectas paralelas. Tomemos como ecuaciones canónicas las siguientes:

$$\begin{aligned} x^2+y^2&=0 && \text{punto contenido en el plano } XY,\\ z^2&=0 && \text{recta doble contenida en el plano } YZ,\\ z^2-x^2&=0 && \text{rectas que se cortan contenidas en el plano } ZX,\\ y^2&=9 && \text{rectas paralelas contenidas en el plano } YZ. \end{aligned}$$

En el primer caso, cualquiera de las sustituciones (6.3) o (6.4) da lugar a la ecuación

$$x^2+y^2+z^2=0,$$

que nuevamente corresponde a un punto, $(0,0,0)$, caso límite de esferas cuyo centro es el origen y cuyos radios tienden a cero.

En el segundo caso, dependiendo de cuál eje se tome como de revolución, obtenemos una recta

$$x^2 + z^2 = 0: \text{ el eje } Y, \text{ si el eje de revolución es el eje } Y,$$

o un plano doble

$$z^2 = 0: \text{ el plano } XY \text{ si el eje de revolución es el eje } Z.$$

Las dos rectas que se cortan pertenecientes al plano ZX, podemos rotarlas respecto a cualquiera de los ejes, Z o X, porque ambos son ejes de simetría, y obtenemos un cono en ambos casos,

$$\begin{array}{ll} y^2 + z^2 - x^2 = 0 & \text{si el eje de rotación es el eje } X, \\ z^2 - x^2 - y^2 = 0 & \text{si el eje de rotación es el eje } Z. \end{array}$$

Desde luego, los conos son distintos como lo muestra la Figura 6.12.

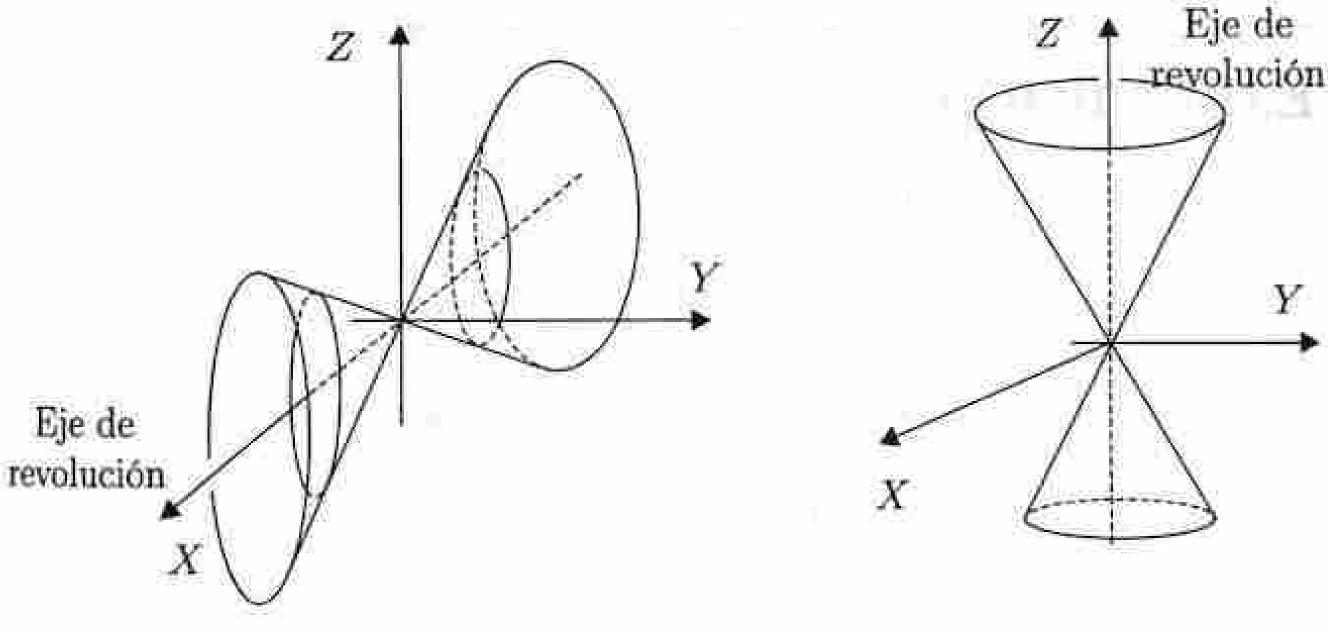


Figura 6.12: Los dos conos generados al rotar dos rectas que se cortan.

Las dos rectas paralelas pertenecientes al plano YZ son simétricas respecto a cualquiera de los ejes Y o Z, y paralelas respecto al eje Z. Si las rotamos en torno al eje Y, cada una genera un plano paralelo al plano XZ, y si las rotamos en torno al eje Z, cada una alcanza a la otra después de rotar un ángulo de π y se forma un cilindro. Las sustituciones son (6.5) y (6.6), respectivamente, que dan lugar a las ecuaciones

$$y^2 = 9 \text{ y } x^2 + y^2 = 9.$$

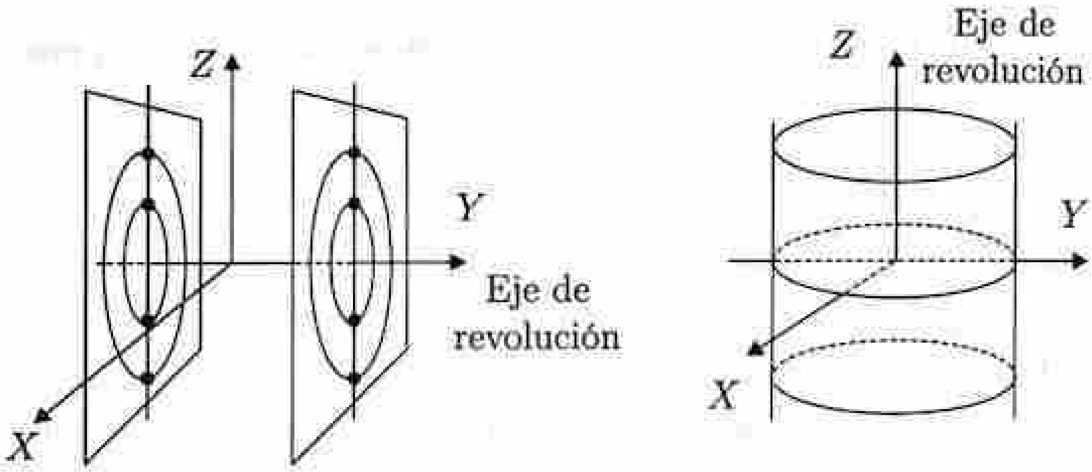


Figura 6.13: Al rotar dos rectas paralelas, resultan dos planos paralelos o un cilindro.

Las ilustraciones aparecen en la Figura 6.13.

EJERCICIOS

1. Obtenga la ecuación de la superficie de revolución generada al rotar la circunferencia en el plano YZ $(y-2)^2 + z^2 = 1$ en torno al eje Z, y dibújela. El nombre matemático de esta superficie es *toro*, y juega un papel importante en muchas ramas de la geometría. ¿Es una superficie cuádrica?

2. Dibuje la superficie de revolución correspondiente a cada una de las ecuaciones siguientes:

   a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$;

   b) $-\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{4} = 1$;

   c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$;

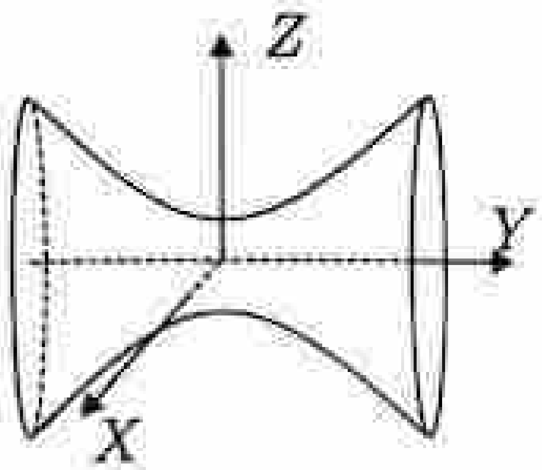
   d) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 0$.

3. Para cada una de las figuras ilustradas en la página siguiente, dé una ecuación cuadrática que pueda corresponderle.

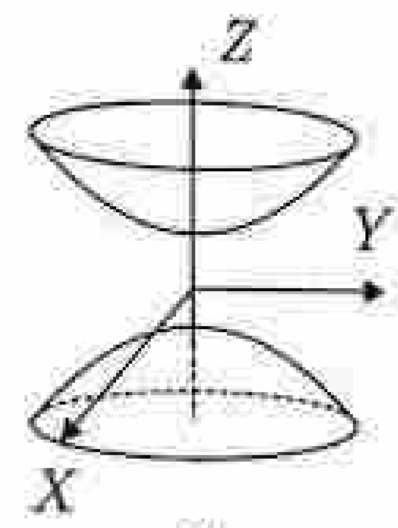
4. Demuestre que la familia de elipsoides cuyo centro es el origen obtenida al variar $k \geq 0$ en la ecuación

$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = k,$$

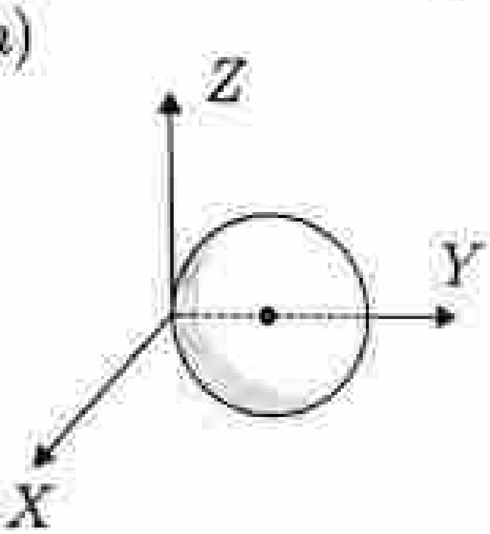
   llena el espacio, en el sentido de que cada punto $P(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ pertenece a uno de esos elipsoides.



(a)



(b)



(c)

5. Demuestre que la familia de hiperboloides obtenidos al variar $k \in \mathbb{R}$ en la ecuación
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = k,$$
llena el espacio en el mismo sentido del ejercicio anterior.

6. Demuestre que una esfera tiene un número infinito de planos y de ejes de simetría. ¿Cuántos centros?

7. Demuestre que al cortar una esfera con cualquier plano resulta una circunferencia.

8. Demuestre que si A y B son dos puntos fijos en $\mathbb{R}^3$, el conjunto de puntos que satisfacen $(P - A) \cdot (P - B) = 0$ es una esfera.

6.3. Las posibles superficies cuádricas

Una ecuación de segundo grado en tres variables sin términos mixtos tiene la forma
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0. \tag{6.11}$$