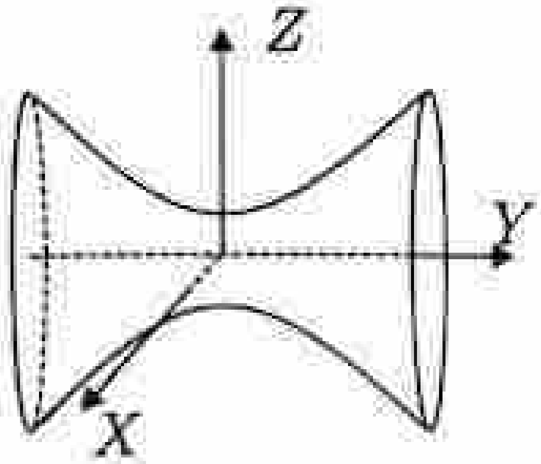
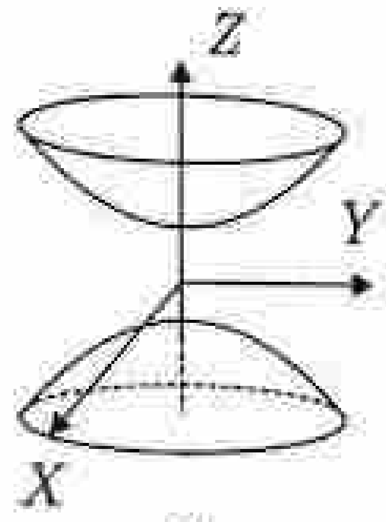
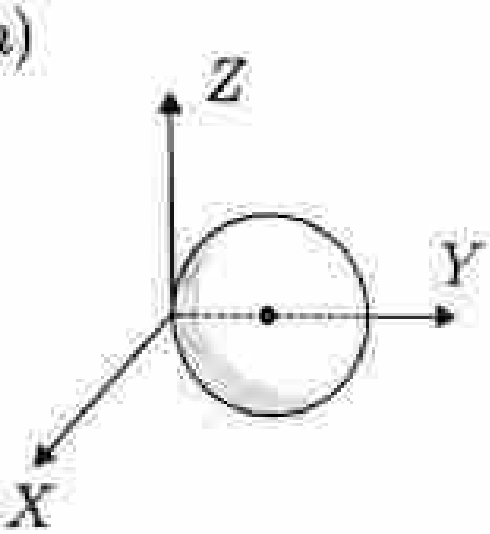


(a)



(b)



(c)

5. Demuestre que la familia de hiperboloides obtenidos al variar $k \in \mathbb{R}$ en la ecuación
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = k,$$
llena el espacio en el mismo sentido del ejercicio anterior.
6. Demuestre que una esfera tiene un número infinito de planos y de ejes de simetría. ¿Cuántos centros?
7. Demuestre que al cortar una esfera con cualquier plano resulta una circunferencia.
8. Demuestre que si A y B son dos puntos fijos en $\mathbb{R}^3$, el conjunto de puntos que satisfacen $(P - A) \cdot (P - B) = 0$ es una esfera.

6.3. Las posibles superficies cuádricas

Una ecuación de segundo grado en tres variables sin términos mixtos tiene la forma
$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0. \tag{6.11}$$

Es importante notar que, en general, para satisfacerla podemos elegir arbitrariamente el valor de dos de las variables y entonces la tercera queda obligada excepto por el signo. Por haber dos **grados de libertad** decimos que una *ecuación en tres variables representa una superficie*. Afirmamos dos cosas.

1a.) Cuando hay términos mixtos en una ecuación cuadrática, éstos pueden eliminarse mediante una rotación adecuada con centro en el origen $(0,0,0)$.

2a.) Salvo un único caso, ya hemos visto ejemplos de las superficies que resultan como lugar geométrico al dar valores numéricos a los coeficientes de la ecuación anterior.

Para justificar la primera de estas afirmaciones necesitamos nociones básicas de transformaciones lineales, mismas que conforman el último capítulo; en cambio, para justificar la segunda bastará hacer un análisis ordenado de los casos posibles.

Es importante recalcar que cuando un problema se resuelve por casos, debe cuidarse de agotar **todos** los casos posibles. En nuestro caso, el papel relevante lo tienen los términos *cuadráticos*, y por eso la primera división considerará tres casos esenciales: I) A, B y C no nulos; II) $A = 0$, B y C no nulos; III) $A = B = 0$ y $C \neq 0$. Las posibilidades como $B = 0$ y A y C no nulos sólo involucran un cambio en la posición de la superficie.

En el caso I se dice que la cuádrica tiene *rango 3*, en el caso II se dice que la cuádrica tiene *rango 2*, y en el caso III la cuádrica tiene *rango 1*; en el Capítulo 7 demostraremos que el rango es invariante bajo cambios de posición de la cuádrica en un sistema coordenado.

Nos ahorraremos mucha escritura si tomamos en cuenta una observación sencilla: cuando uno de los coeficientes cuadráticos sea no cero, por ejemplo $A \neq 0$, la existencia del término lineal correspondiente, $G \neq 0$, no es relevante, pues bastará completar el cuadrado (lo cual implica sólo una traslación) para reducir el estudio a un caso trasladado de uno canónico. Esto quedará más claro con el análisis del primer caso.

I) Si $A, B, C \neq 0$ en (6.11), tenemos dos subcasos esencialmente distintos: a) que el signo de los tres coeficientes sea el mismo, o b) que dos coincidan en signo y difieran del tercero.

a) Un caso típico con los tres coeficientes del mismo signo lo proporciona la ecuación siguiente, donde hemos tomado $A = B = C = 1$:

$$x^2 + y^2 + z^2 + Gx + Hy + Iz + J = 0.$$

Si G, H o I no son cero, podemos completar el cuadrado correspondiente, por ejemplo

$$x^2 + Gx + (G/2)^2 - (G/2)^2 = \left(x - (G/2)\right)^2 - (G/2)^2,$$

para obtener una ecuación del tipo

$$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - m)^2 + J' = 0,$$

donde J' resulta al agrupar con J los negativos de los números que debimos sumar para completar los cuadrados. La última ecuación es una esfera con centro (h, k, m) si $J' < 0$, el punto (h, k, m) si $J' = 0$, o el conjunto vacío si $J' > 0$. Si en lugar de tomar los tres coeficientes iguales hubiéramos tomado, por ejemplo, $A = 1$, $B = 2$ y $C = 3$, la única diferencia se daría si $J' < 0$, pues la superficie sería un *elipsoide no de revolución* con centro (h, k, m) en lugar de una esfera, pero las otras dos posibilidades no cambian, lo cual deberá justificar el lector en uno de los ejercicios. La diferencia entre un elipsoide de revolución y el que resulta al tomar $A = 1$, $B = 2$ y $C = 3$, es que los cortes con planos paralelos a los de simetría son siempres elipses, nunca circunferencias.

b) Un caso típico en que dos de los coeficientes tienen el mismo signo y difieren del signo del tercero, está dado por la ecuación siguiente:

$$x^2 + y^2 - z^2 + J = 0,$$

que, según hemos visto, corresponde a un hiperboloide de dos mantos si $J > 0$, a un cono si $J = 0$, y a un hiperboloide de un manto si $J < 0$. Si en lugar de tomar $A = B = 1$ y $C = -1$ hubiéramos tomado, por ejemplo, $A = 1$, $B = 2$ y $C = -3$, la diferencia sería que los hiperboloides y el cono no serían de revolución sino *hiperboloides elípticos* y *cono elíptico*. La costumbre es no escribir el adjetivo "elíptico", sino más bien resaltar el caso en que sea "de revolución".

Así pues, podemos concluir que cuando los tres coeficientes de los términos cuadráticos son no cero y tienen el mismo signo (subcaso (a)), el lugar geométrico puede ser un *elipsoide*, un *punto* o el *conjunto vacío*, en tanto que cuando dos de los coeficientes tienen un mismo signo que difiere del tercero (subcaso (b)), los lugares geométricos posibles son un *hiperboloide de dos mantos*, un *cono* o un *hiperboloide de un manto*.

II) Cuando uno de los coeficientes cuadráticos de (6.11) se anula pero los otros dos son no cero, por ejemplo $C = 0$ y $A, B \neq 0$, hay cuatro subcasos esencialmente distintos: a) cuando el coeficiente del término lineal correspondiente al cuadrático nulo es distinto de cero, $I \neq 0$ si $C = 0$ para nuestro ejemplo, y los otros dos coeficientes tienen el mismo signo, b) cuando el coeficiente del término lineal correspondiente al cuadrático nulo es distinto de cero y los otros dos coeficientes difieren en signo, c) cuando el coeficiente del término lineal correspondiente al cuadrático nulo también se anule, $I = 0$ en la ecuación (6.11), y los coeficientes cuadráticos no nulos tienen el mismo signo, y d) cuando es cero el coeficiente del término lineal correspondiente al cuadrático que se anula y los dos coeficientes cuadráticos no cero difieren en signo.

a) Un ejemplo típico del primer subcaso es la ecuación

$$x^2 + 2y^2 + z = 0,$$

cuyo lugar geométrico es un *paraboloide elíptico,* muy parecido al paraboloide de revolución de la Figura 6.9, con la única diferencia de que los cortes con los planos $z = constante$ son elipses en vez de circunferencias.

b) Un ejemplo del segundo subcaso está dado por la ecuación

$$x^2 - y^2 - z = 0,$$

de cuyo lugar geométrico no tenemos un ejemplo hasta ahora. Si analizamos los cortes de esta superficie con los planos z=constante, por ejemplo con $z = 1$, $z = 0$ y $z = -1$, resulta una hipérbola cuyo eje focal es paralelo al eje X a altura $z = 1$, o el par de rectas a más y menos 45° en el plano XY, o una hipérbola cuyo eje focal es paralelo al eje Y a altura $z = -1$. En cambio, cuando cortamos con planos x=constante (paralelos al plano YZ), o con planos y=constante (paralelos al plano XZ), obtenemos parábolas que se abren hacia abajo en el primer caso, y hacia arriba en el segundo. Esta superficie se denomina *paraboloide hiperbólico* o *silla de montar*, pues su aspecto es el ilustrado en al Figura 6.14.

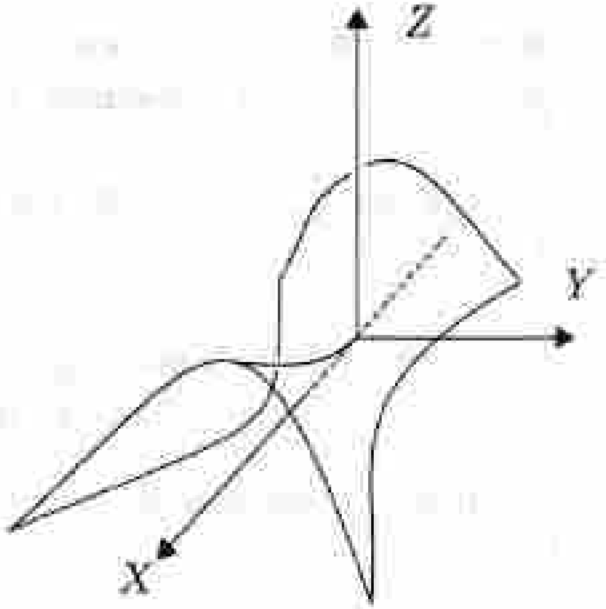


Figura 6.14: Paraboloide hiperbólico o silla de montar.

El punto $(0,0,0)$ pertenece a la superficie y es el mejor ejemplo de un *punto silla*, pues para la parábola resultante al cortar con el plano $y=0$ es el punto más bajo (su vértice), pero para la parábola resultante al cortar con el plano $x=0$ es el punto más alto (también es el vértice).

Nos interesa que el lector estudie cuidadosamente esta superficie; puede pensarse como formada por parábolas congruentes a la parábola $z=-y^2$ del plano $x=0$, paralelas a ese plano y cuyos vértices pertenecen a la parábola $z=x^2$ del plano XZ, y también puede pensarse como formada por hipérbolas de la familia $x^2-y^2=k$ ubicadas cada una a la altura k sobre el plano XY. Más sorprendente resulta pensarla formada por rectas de dos familias distintas, como lo demostraremos más adelante.

c) El tercer subcaso tiene como ejemplo la ecuación

$$x^2+2y^2+J=0,$$

que tiene como lugar geométrico el *conjunto vacío* si $J > 0$; una *recta*, $(0, 0, z)$, si $J = 0$, y un *cilindro elíptico* si $J < 0$.

d) Un ejemplo del cuarto subcaso es la ecuación

$$x^2 - y^2 + J = 0,$$

cuyos posibles lugares geométricos son: un *cilindro hiperbólico* si $J \neq 0$ y *dos planos que se cortan* cuando $J = 0$.

Por tanto, cuando uno de los coeficientes de los términos cuadráticos es cero, los posibles lugares geométricos son: un *paraboloide elíptico* en el subcaso a); un *paraboloide hiperbólico o silla de montar* en el subcaso b); el *conjunto vacío*, una *recta* o un *cilindro elíptico* en el subcaso c); y un *cilindro hiperbólico* o *dos planos que se cortan* en el subcaso d).

III) Cuando dos de los coeficientes cuadráticos de (6.11) se anulan, por ejemplo $B = C = 0$, el tercero debe ser no nulo y hay tres subcasos distintos: a) cuando son no nulos ambos coeficientes de los términos lineales correspondientes a los cuadráticos que se anulan, $H, I \neq 0$ en la ecuación (6.11); b) cuando se anula sólo uno de los coeficientes de los términos lineales correspondientes a los cuadráticos que se anulan, $H = 0$ e $I \neq 0$ en nuestro ejemplo; y c) cuando se anulan los dos términos lineales correspondientes a los cuadráticos que se anulan.

a) Una ecuación típica para este subcaso es

$$x^2 + y + z = 0,$$

y el lugar geométrico correspondiente es un *cilindro parabólico* que no está en posición canónica, pero el lector lo reconocerá al considerar que la intersección con un plano del tipo $x = k$ es una recta, $y + z + k^2 = 0$, como lo muestra la Figura 6.15.

Nótese que si $J \neq 0$, la superficie difiere únicamente por estar trasladada, es decir, no pasa por el origen sino por el punto $(0, -J, 0)$.

b) Un ejemplo de este subcaso es la ecuación

$$x^2 + y = 0,$$

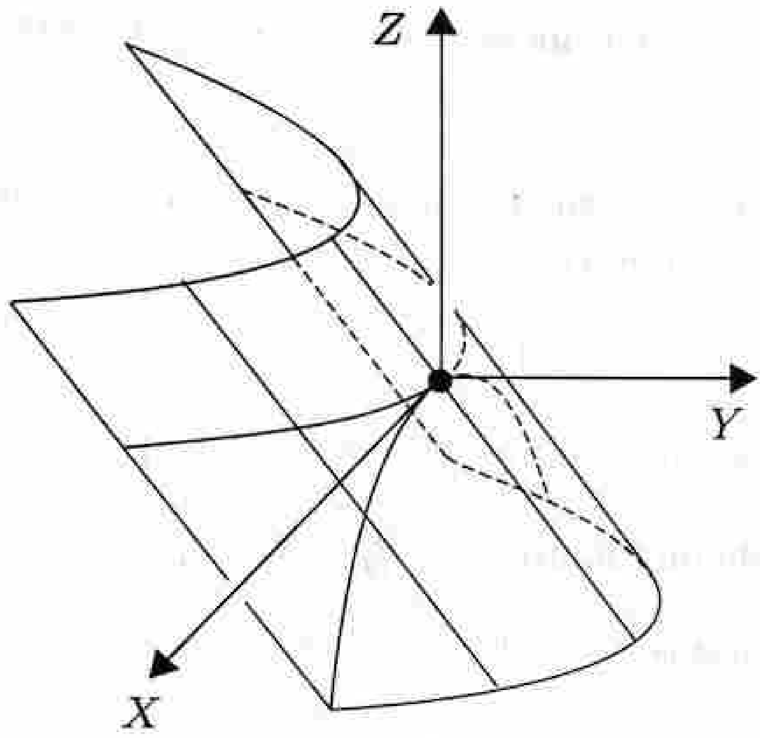


Figura 6.15: Cilindro parabólico en posición no canónica.

que es también un *cilindro parabólico*, sólo que esta vez sí está en posición canónica. Nuevamente, si $J \neq 0$ la superficie sólo difiere de la del ejemplo por una traslación.

c) Finalmente, un ejemplo de este subcaso es

$$x^2 + J = 0,$$

que corresponde al *conjunto vacío* si $J > 0$, o a un *plano doble*, el YZ, si $J = 0$, o a *dos planos paralelos*, $x = \pm\sqrt{-J}$ si $J < 0$.

Entonces, cuando sólo uno de los coeficientes cuadráticos es distinto de cero, las posibilidades son: un *cilindro parabólico* para los casos a) y b), y el *conjunto vacío*, un *plano doble* o *dos planos que se cortan* para el caso c).

El lector deberá comprobar que hemos analizado ya todos los casos.

Si comparamos las posibilidades obtenidas con las que conocíamos antes de este análisis, comprobamos que la única superficie de la cual no teníamos algún ejemplo es el paraboloide hiperbólico, pues no surge ni al modificar el tamaño de los ejes de una superficie de revolución, puesto que eso significaría convertir en elipses las circunferencias de una superficie de revolución, y en un paraboloide hiperbólico no hay elipses, ni es un cilindro porque no está formado por rectas paralelas a una dirección fija.

A continuación listamos los distintos lugares geométricos correspondientes a una ecuación cuadrática sin términos mixtos en tres variables, acompañándolos de su *ecuación canónica*:

1. elipsoide: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$.
2. hiperboloide de dos mantos: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.
3. hiperboloide de un manto: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$.
4. paraboloide elíptico: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$.
5. paraboloide hiperbólico: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$.
6. cilindro elíptico: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
7. cilindro hiperbólico: $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.
8. cilindro parabólico: $x^2 = 4py$;
9. cono elíptico: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2$
10. dos planos que se cortan: $x^2 - 2y^2 = 0$;
11. dos planos paralelos: $x^2 - 1 = 0$;
12. un plano doble: $x^2 = 0$;
13. una recta: $x^2 + y^2 = 0$;
14. un punto: $x^2 + y^2 + z^2 = 0$;
15. el conjunto vacío: $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$.

Desde luego, no todos estos lugares geométricos constituyen verdaderas superficies, como ocurre con los tres últimos, y es fácil observar que un cono o dos planos que se cortan contienen puntos en los cuales el plano tangente no está bien definido. Pero como lo exhiben los ejemplos, son posibles lugares geométricos de una ecuación de segundo grado en tres variables.

Hemos escrito las ecuaciones canónicas en sólo una de sus modalidades, por ejemplo $x^2 = 0$ para un plano doble, pero claramente pudimos escribir $z^2 = 0$. La única diferencia es la posición de la superficie respecto al sistema coordenado, pero las propiedades geométricas son exactamente las mismas.

EJERCICIOS

1. Dé un ejemplo de cada uno de los distintos tipos de polinomios cuadráticos en tres variables sin términos mixtos y haga el dibujo correspondiente en cada caso.

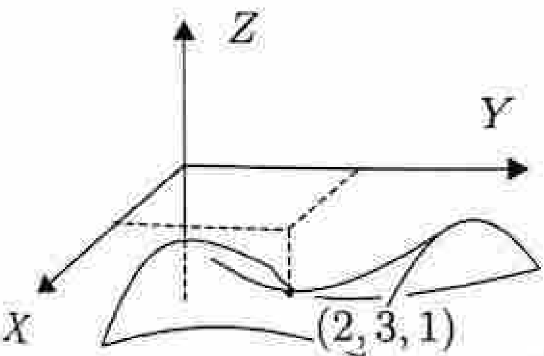
2. ¿Cuáles son los posibles lugares geométricos si la ecuación (6.11) carece de término en x^2? Dé un ejemplo para cada posibilidad y haga el dibujo correspondiente en cada caso.

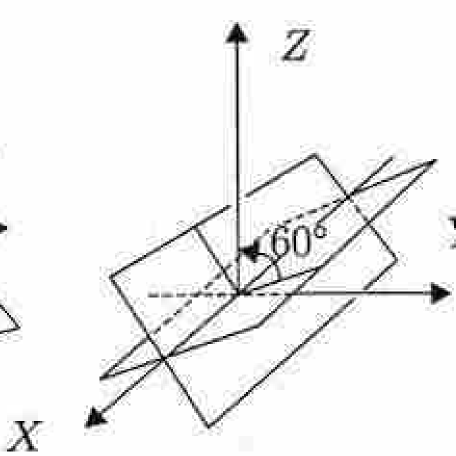
3. ¿Cuáles son los posibles lugares lugares geométricos si la ecuación (6.11) carece de término en y^2 y en y? Dé un ejemplo para cada posibilidad y haga el dibujo correspondiente en cada caso.

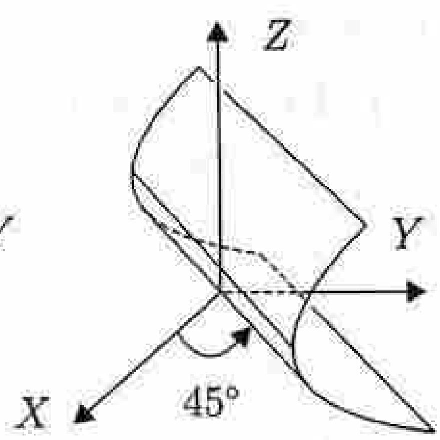
4. ¿Cuáles son los posibles lugares geométricos si la ecuación (6.11) tiene exactamente dos coeficientes cuadráticos iguales? Dé un ejemplo para cada posibilidad y haga el dibujo correspondiente en cada caso.

5. ¿Cuáles son los posibles lugares geométricos si el polinomio tiene sólo un coeficiente cuadrático no nulo? Dé un ejemplo para cada posibilidad y haga el dibujo correspondiente en cada caso.

6. Dé la ecuación correspondiente al paraboloide hipérbolico, el par de planos que se cortan y el cilindro parabólico en posición no canónica ilustrados a continuación.







7. Demuestre que si cualquier corte de una superficie cuádrica con un plano es una elipse, la superficie debe ser un elipsoide.
8. Justifique la afirmación siguiente: el cono de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$ es un caso límite tanto de una familia de hiperboloides de un manto como de una familia de hiperboloides de dos mantos. *Sugerencia:* sustituya el 1 en el lado derecho de la ecuación canónica de un hiperboloide de un manto por $k \in \mathbb{R}$; ¿qué superficie resulta cuando $k=0$? ¿Y cuando $k=-1$? ¿Y cuando $k<0$? ¿Y cuando $k>0$?
9. Demuestre que nuestro análisis abarcó todos los casos posibles.
10. Haga el análisis de las posibles superficies correspondientes a la ecuación $x^2+2y^2+3z^2+Gx+Hy+Iz+J=0$, dependiendo del signo de G, H, I y J.

6.4. Simetrías y extensión

Analizaremos ahora algunas propiedades de las superficies cuadráticas. Veremos que ese análisis es muy sencillo a partir de las ecuaciones canónicas consignadas en el inciso anterior, pues esas ecuaciones resultaron de ubicar apropiadamente las cónicas que las originaron.

Simetrías

Si recordamos la definición de simetría respecto a cada uno de los planos coordenados, de los ejes coordenados o del origen, es inmediato concluir lo siguiente (nos referiremos a la numeración utilizada en la lista del final del inciso anterior):

1) Un elipsoide tiene *tres planos de simetría, tres ejes de simetría y un centro de simetría.*

   El elipsoide en posición canónica tiene los tres planos coordenados como planos de simetría, pues cuando una de las coordenadas de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ del elipsoide cambia de signo, por ejemplo $x_0 \mapsto -x_0$, resulta un punto simétrico respecto al plano de las otras dos variables, YZ en nuestro ejemplo, pero como la variable x aparece elevada al cuadrado en la ecuación del elipsoide, el punto $P'(-x_0, y_0, z_0)$ satisface también la ecuación del elipsoide.