el punto a su posición original con la traslación inversa. Uno de los ejercicios siguientes permitirá al lector convencerse de lo anterior.

EJERCICIOS

1. Demuestre que una transformación rígida es suprayectiva. (Sugerencia: Para cualquier $P \in \mathbb{R}^3$, considere el triángulo que forma con dos puntos que estén la imagen.)
2. Demuestre que los valores propios reales de una transformación ortogonal de orden 3 tienen valor absoluto 1.
3. Construya la matriz asociada (en la base canónica) a la transformación ortogonal de orden 3 correspondiente a la reflexión respecto al plano $x + y + z = 0$.
4. Demuestre que la composición de la traslación por $(1, 2, 3)$ con el resultado de componer una rotación en torno al origen con la traslación por $(-1, -2, -3)$ es una transformación rígida que fija al punto $(1, 2, 3)$ y por eso se llama *rotación en torno a* $(1, 2, 3)$.
5. Demuestre que la matriz asociada a una reflexión respecto a una recta l_θ por el origen en $\mathbb{R}^2$ es ortogonal.
6. Demuestre que la matriz asociada a una reflexión respecto a uno de los planos coordenados en $\mathbb{R}^3$ es ortogonal.
7. Demuestre que $GL(3, \mathbb{R})$ es un grupo bajo la multiplicación.
8. Demuestre que las reflexiones generan al grupo ortogonal $O(3, \mathbb{R})$.
9. Determine cuáles las cuádricas son invariantes bajo alguna transformación rígida. (Sugerencia: Tome en cuenta las simetrías de cada cuádrica.)
10. Proponga una operación entre los puntos de la circunferencia unitaria con centro en el origen de $\mathbb{R}^2$ tomando en cuenta que cada punto corresponde a una rotación y que las rotaciones forman grupo bajo la composición (véase [Ma]).

7.5. Eliminación de términos mixtos

En este inciso demostraremos que los términos mixtos de ecuaciones cuadráticas, ya sea en dos o en tres variables, pueden eliminarse siempre mediante una rotación adecuada. De esta manera justificaremos haber estudiado únicamente las cónicas y las cuádricas cuya ecuación era de tipo canónico (con los ejes de simetría coincidiendo con los coordenados o paralelos a ellos).

Aparecerán, como por arte de magia, transformaciones lineales cuyos vectores propios darán la solución al problema. Lo natural, entonces, sería resolver el enigma de la aparición de esas transformaciones lineales tan naturalmente ligadas al problema. Aunque no haremos una justificación formal, misma que pertenece al campo de la Geometría Proyectiva, después de demostrar que los términos mixtos siempre pueden eliminarse mediante una rotación adecuada, daremos un argumento intuitivo para entender el papel central jugado por la transformación lineal.

Cónicas rotadas

Si queremos conocer la ecuación de la cónica obtenida al rotar en torno al origen una cónica en posición canónica, por ejemplo la elipse

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

debemos utilizar el procedimiento ya conocido: como las rotaciones son invertibles, si $(x',y')=Ro_\phi(x,y)$, entonces $(x,y)=Ro_\phi^{-1}(x',y')$.

La inversa de la rotación por el ángulo ϕ es la rotación por el ángulo $-\phi$ y podemos escribir

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x'\cos\phi+y'\operatorname{sen}\phi \\ -x'\operatorname{sen}\phi+y'\cos\phi \end{pmatrix}. \tag{7.5}$$

Si en la ecuación de la elipse sustituimos las expresiones para x y y dadas por la igualdad de los vectores columna primero y último, obtenemos

$$\frac{(x'\cos\phi+y'\operatorname{sen}\phi)^2}{a^2}+\frac{(-x'\operatorname{sen}\phi+y'\cos\phi)^2}{b^2}=1,$$

que al desarrollar cuadrados da lugar a un polinomio de segundo grado en x y y cuyo término mixto tiene el coeficiente

$$2\Big((1/a^2)-(1/b^2)\Big)\cos\phi\operatorname{sen}\phi.$$

Este coeficiente es nulo sólo en tres casos: si $a=b$, lo cual indica que la elipse es en realidad una circunferencia; si $\cos\phi=0$, lo cual ocurre sólo si ϕ

es múltiplo impar de $\pi/2$, implicando que hemos obtenido una elipse cuyo eje focal es el eje Y y que puede considerarse en posición canónica; o si $\operatorname{sen}\phi = 0$, lo cual implica que ϕ es múltiplo par de $\pi/2$, dejando a la elipse invariante debido a la simetría respecto al eje conjugado que, en la posición canónica es el eje Y.

En todos los demás casos el ángulo no es múltiplo de $\pi/2$, y la ecuación de la elipse rotada tiene un término mixto con coeficiente no nulo.

Eliminación de términos mixtos

El análisis anterior nos lleva a preguntar si así como una rotación puede lograr que la ecuación de la curva rotada adquiera un término mixto, también es posible que una rotación adecuada logre que al rotar una curva cuya ecuación tiene término mixto con coeficiente no cero, la ecuación de la curva rotada carezca de término mixto.

La respuesta es sí, y antes de demostrarlo haremos una observación sobre las ecuaciones cuadráticas.

Cualquier ecuación de segundo grado en dos variables $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ puede escribirse en forma matricial:

$$(x \quad y)\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (D \quad E)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + F = 0$$

Note que la matriz donde aparecen los coeficientes cuadráticos se toma simétrica, lo cual la determina en forma única; se denomina *matriz de la parte cuadrática*.

El lector debe aprender a formar este tipo de matrices: tanto en los renglones como en las columnas se respeta el orden lexicográfico: primero x, luego y, etc. (cuando hay más de 2 variables), y entonces a las entradas les corresponde de manera natural los distintos términos: x^2 a la entrada del primer renglón y primera columna; xy tanto a la entrada del primer renglón y segunda columna como a la del segundo renglón y primera columna, lo cual obliga a dividir entre dos el coeficiente del término mixto xy; y^2 a la entrada del segundo renglón y segunda columna, etc. (cuando hay más de 2 variables). La demostración es un poco larga, pero también es muy importante.

El teorema que vamos a demostrar es el siguiente.

Teorema Los términos mixtos de una ecuación cuadrática pueden eliminarse mediante una rotación adecuada.

Demostración.

Tal vez el lector haya notado que en el enunciado no mencionamos el número de variables. Eso se debe a que la afirmación es válida con cualquier número de variables, aunque nosotros haremos la demostración sólo en los casos de 2 y 3 variables. El caso de 3 variables utiliza el caso de 2 variables indicando así el camino para demostrar la validez del teorema en el caso general.

En el **caso de dos variables**, si existe una rotación que permita eliminar el término mixto, eso significa que al sustituir en la forma matricial las matrices renglón $(x\ y)$ y columna $(x\ y)^t$ por las expresiones obtenidas de la ecuación 7.5, la ecuación de la curva rotada debe tener un coeficiente nulo en el término mixto. Obtengamos primero las expresiones de $(x\ y)$ y $(x\ y)^t$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

y

$$(x \quad y) = (x' \quad y') \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$$

donde la segunda igualdad se debe a que la transpuesta de una matriz que es producto de otras dos es igual al producto de las matrices transpuestas **pero** con el orden cambiado, según debe haberlo comprobado el lector en uno de los ejercicios.

Si sustituimos estas expresiones en la forma matricial, la nueva parte cuadrática es

$$\begin{aligned} &(x \quad y) \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= (x' \quad y') \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Entonces, la matriz de la nueva parte cuadrática es el producto de las tres matrices cuadradas y como pretendemos que la ecuación de la curva rotada **no** tenga término mixto, la matriz producto debe ser diagonal (puesto que las entradas superior derecha e inferior izquierda son iguales a la mitad del coeficiente del término mixto); es decir, deben existir números reales A' y C' tales que

$$\begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}.$$

Esta igualdad entre matrices da lugar a interpretar la matriz de la parte cuadrática como la transformación lineal que induce en $\mathbb{R}^2$. Esto es claro cuando multiplicamos **por la izquierda** ambos miembros por la matriz inversa de la primera de la izquierda (como es la matriz de una rotación, su inversa es su transpuesta):

$$\begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A' & 0 \\ 0 & C' \end{pmatrix}.$$

Si el lector realiza los productos en ambos miembros, podrá comprobar que existen las igualdades siguientes entre los vectores columna de las matrices producto:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\phi \\ -\operatorname{sen}\phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A'\cos\phi \\ -A'\operatorname{sen}\phi \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \operatorname{sen}\phi \\ \cos\phi \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} C'\operatorname{sen}\phi \\ C'\cos\phi \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

lo cual conviene leer así:

De existir una rotación Ro_ϕ que elimine los términos mixtos, los vectores columna de la rotación inversa, Ro_ϕ^{-1}, deben ser vectores propios de la transformación lineal inducida por la matriz de la parte cuadrática.

Entonces, sólo falta demostrar que dicha transformación tiene siempre dos valores propios reales y, por consiguiente, dos vectores propios que conformen la inversa de la rotación buscada. Pero eso siempre ocurre, porque el polinomio característico de una matriz simétrica tiene siempre dos raíces reales, como comprobamos a continuación.

El polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & B \\ B & C-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (A+C)\lambda + AC - B^2.$$

El discriminante de esta ecuación es

$$\begin{aligned}\Delta &= (A+C)^2 - 4(AC - B^2)\\ &= A^2 + 2AC + C^2 - 4AC + 4B^2 = (A-C)^2 + 4B^2.\end{aligned}$$

La suma de cuadrados del final muestra que Δ nunca es menor que cero y, en consecuencia, los vectores buscados siempre existen. Faltaría únicamente verificar que dichos vectores son perpendiculares entre sí (para que den lugar a una matriz de rotación), pero ése fue el ejercicio 4 del inciso 3 y, por tanto, hemos demostrado la posibilidad de eliminar el término mixto de una ecuación de segundo grado en dos variables mediante una rotación adecuada.

Vayamos ahora al **caso de tres variables**:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

cuya expresión matricial es (la matriz de la parte cuadrática se toma simétrica):

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & D & E\\ D & B & F\\ E & F & C\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} G & H & I\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} + J = 0.$$

El razonamiento es idéntico al aplicado antes: si (x', y', z') son las coordenadas del punto P' resultante de haber rotado al punto P de coordenadas (x, y, z), entonces (x, y, z) resultan de aplicar el inverso de esa rotación a (x', y', z'). La matriz de una rotación es ortogonal y, por tanto, su inversa es su transpuesta y las sustituciones que debemos efectuar son

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} x & y & z\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x' & y' & z'\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{pmatrix}\\ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x'\\ y'\\ z'\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Pretendemos que la matriz de la nueva parte cuadrática sea diagonal (porque la nueva ecuación **no** debe tener términos mixtos), y por eso planteamos la igualdad siguiente:

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix},$$

y, como antes, al multiplicar ambos miembros por la izquierda por la matriz inversa de la primera (que, por ser ortogonal, es la transpuesta) y comparar los correspondientes vectores columna de ambos miembros, obtenemos las igualdades

$$\begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \lambda_3 \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix},$$

que expresan el hecho de que los vectores columna de la rotación inversa de la que estamos buscando deben ser vectores propios de la transformación lineal inducida por la matriz de la parte cuadrática.

Entonces, la posibilidad de eliminar los términos mixtos de una ecuación de segundo grado en 3 variables equivale a que el polinomio característico de una matriz simétrica de orden 3 tenga siempre tres raíces reales.

Para demostrar que eso siempre ocurre, comencemos por recordar que un polinomio de grado impar tiene siempre una raíz real λ_1 que da lugar al primer vector propio (unitario) $\widehat{a}$. Si la transformación lineal inducida por la matriz de la parte cuadrática se escribe en términos de una base ortonormal cuyo primer elemento tenga la dirección del vector $\widehat{a}$, entonces el primer vector columna tiene como coordenadas $(\lambda_1, 0, 0)$ porque el vector unitario de la dirección invariante queda multiplicado por λ_1.

Para completar la nueva matriz, recordemos que al demostrar la invariancia del polinomio característico bajo cambios de base, establecimos la ecuación (7.4) para expresar en una nueva base E la matriz correspondiente a una transformación lineal cuando se conocen la matriz M_T^F en términos de una base anterior F y las matrices (inversa una de la otra) de cambio de una base a la otra, basta multiplicar la matriz conocida por dichas matrices de cambio de base (una de cada lado):

$$M_T^E = B_F^E M_T^F B_E^F$$

En este caso, las matrices B_F^E y B_E^F son ortogonales debido a que llevan una base ortonormal en otra; entonces, son una la transpuesta de la otra y eso da lugar a que la nueva matriz M_T^E sea simétrica, como se comprueba al transponerla:

$$(M_T^E)^t = (B_F^E M_T^F B_E^F)^t = (B_E^F)^t (M_T^F)^t (B_F^E)^t = B_F^E M_T^F B_E^F = M_T^E,$$

donde la segunda igualdad se debe a la regla para obtener la matriz transpuesta de un producto, y la tercera utiliza la ortogonalidad de las matrices de ambos cambios de base y la simetría de la matriz original.

Así, la matriz de la parte cuadrática respecto a la nueva base debe tener la forma

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & \beta \\ 0 & \beta & \gamma \end{pmatrix}.$$

Esta matriz tiene como polinomio característico el determinante siguiente:

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \alpha - \lambda & \beta \\ 0 & \beta & \gamma - \lambda \end{vmatrix},$$

que es el producto del factor $\lambda_1 - \lambda$ por el polinomio característico de una matriz simétrica de 2×2. Y como acabamos de ver que el polinomio característico de una tal matriz tiene siempre dos raíces reales, la invariancia del polinomio característico bajo cambios de base, implica que estas dos raíces son valores propios de la matriz original, lo cual concluye la demostración. ∎

Nos interesa comentar dos cosas.

La primera, que el cálculo de las direcciones invariantes permite trazar la gráfica de la cónica o cuádrica original con sólo dibujar una ecuación canónica (o trasladada) respecto a los ejes con esas direcciones, como ejemplificaremos enseguida.

El segundo comentario será para explicar intuitivamente el significado geométrico de la transformación lineal inducida por la matriz de la parte cuadrática.

Veamos primero un ejemplo en dos variables.

El dibujo de una cónica (o una cuádrica) cuya ecuación respecto a un cierto sistema coordenado tiene términos mixtos se reduce al caso de una cónica de ecuación canónica o trasladada cuando conocemos ya los subespacios invariantes de la matriz de la parte cuadrática porque, según lo muestra el diagrama adjunto, si la rotación Ro "endereza"la cónica $\mathcal{C}$, la rotación inversa Ro^{-1} aplicada a la cónica en posición canónica lleva los ejes coordenados a las direcciones correspondientes a los vectores columna de Ro^{-1}:

Por tanto, si Ro da lugar a una figura $\mathcal{C}'$ en posición canónica, una vez conocida la ecuación canónica (o trasladada) para dibujar la figura original $\mathcal{C}$ basta dibujar la figura $\mathcal{C}'$ respecto a los ejes definidos por los vectores columna de Ro^{-1}.

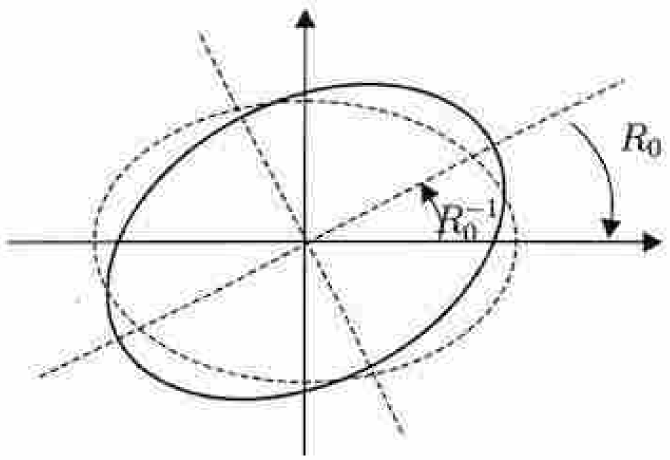

Figura 7.10: Cómo dibujar una cónica con ecuación no canónica.

Como primer ejemplo tomemos la elipse de ecuación

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 16x + 16y + 8 = 0.$$

El polinomio característico de la matriz de la parte cuadrática es

$$\begin{vmatrix} 5-\lambda & -3 \\ -3 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)^2 - 9 = \lambda^2 - 10\lambda + 16,$$

cuyas raíces son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 8$. Los vectores característicos correspondientes están en las direcciones determinadas por las rectas

$$(5-2)u_1 - 3u_2 = 0 \text{ y } (5-8)u_1 - 3u_2 = 0,$$

cuyas pendientes respectivas son $m_1 = u_2/u_1 = 1$ y $m_2 = u_2/u_1 = -1$.

Si la ecuación original no tuviera términos lineales y la constante fuera -8

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 8 = 0,$$

para dibujar a la elipse original bastaría dibujar, respecto a las rectas de pendientes m_1 como eje X' y m_2 como eje Y', la elipse de ecuación canónica

$$2x'^2 + 8y'^2 = 8, \text{ es decir, } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$$

puesto que los valores propios son los elementos de la diagonal de la matriz de la parte cuadrática de la cónica en posición canónica.

Pero nuestra ecuación sí tiene términos lineales, y deberemos efectuar la sustitución del vector columna $(x, y)^t$ por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \tag{7.6}$$

para lograr"enderezadar" la cónica de la cual partimos.

La forma matricial de la ecuación original $5x^2-6xy+5y^2-16x+16y+8=0$ es

$$(x \quad y) \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + (-16 \quad 16) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + 8 = 0,$$

y después de obtener los valores propios ya podemos escribir la parte cuadrática de la curva rotada: $2x'^2 + 8y'^2$, pero para transformar la parte lineal debemos realizar la sustitución indicada por (7.6).

Entonces, la matriz correspondiente a la rotación Ro^{-1} tiene como columnas a los vectores $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$, debido al valor propio 2, y $(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$ debido al valor propio 8. Escribimos

$$2x'^2 + 8y'^2 + (-16 \quad 16) \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + 8 = 0.$$

Si el lector realiza el producto de matrices indicado obtendrá la ecuación

$$2x'^2 + 8y'^2 + 16\sqrt{2}y' + 8 = 0,$$

que corresponde a una cónica con ejes paralelos a las direcciones X' y Y' de los vectores propios porque tiene un término lineal en y'.

Para identificar la traslación respecto a los ejes X' y Y', completamos el cuadrado:

$$2x'^2 + 8(y'^2 + 2\sqrt{2}y' + 2) + 8 - 16 = 2x'^2 + 8(y' + \sqrt{2})^2 - 8 = 0.$$

Entonces, la traslación respecto a los ejes X' Y' está dada por el vector $(0, -\sqrt{2})$, y para dibujar la cónica original hacemos lo siguiente:

i) localizamos el vector de traslación y trazamos por él rectas paralelas a los ejes X' y Y'.

ii) dibujamos la cónica con ejes paralelos a X' y Y' con centro (o vértice si se trata de una parábola) correspondiente al vector de traslación.

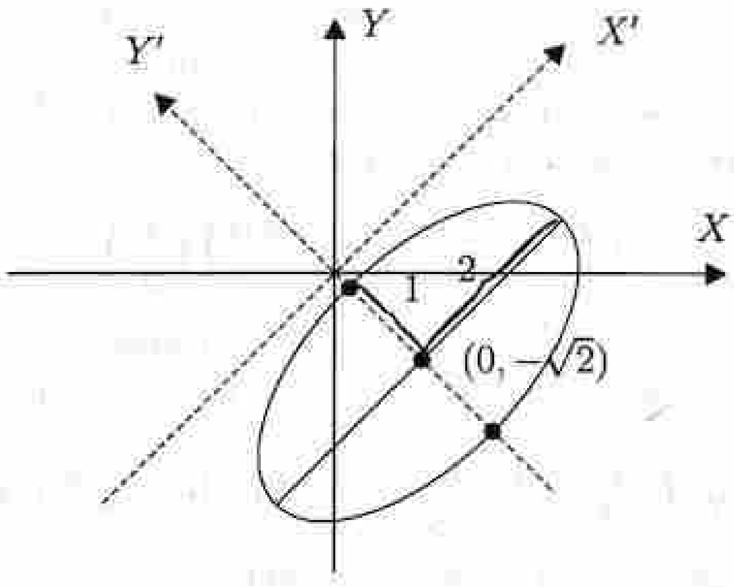

Figura 7.11: Cónica correspondiente a la ecuación $5x^2 - 6xy + 5y^2 - 16x + 16y + 8 = 0$.

Como segundo ejemplo, tomemos la ecuación en tres variables

$$x^2 + 8y^2 + z^2 - 2xz - \sqrt{2}x - \sqrt{2}z = 0.$$

La matriz de la parte cuadrática es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 8 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y su polinomio característico es

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & -1 \\ 0 & 8-\lambda & 0 \\ -1 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} &= (1-\lambda)^2(8-\lambda)-(8-\lambda) \\ &= (8-\lambda)[(1-\lambda)^2-1] = (8-\lambda)[\lambda^2-2\lambda]. \end{aligned}$$

Es claro que las raíces de este polinomio son 0, 2 y 8, y los sistemas que permiten obtener los vectores característicos correspondientes se obtienen al sustituir λ por uno de estos valores en las tres ecuaciones siguientes:

$$\begin{array}{ccccccc} (1-\lambda)x & + & 0y & + & (-1)z & = & 0 \\ 0x & + & (8-\lambda)y & + & 0z & = & 0\,. \\ (-1)x & + & 0y & + & (1-\lambda)z & = & 0 \end{array}$$

Si la ecuación no tuviera términos lineales, ya podríamos escribir la ecuación canónica porque la nueva parte cuadrática es

$$0x'^2 + 2y'^2 + 8z'^2$$

donde el eje X' tiene la dirección del vector propio correspondiente al valor propio 0, el eje Y' tiene la dirección del vector propio correspondiente al valor propio 2, y el eje Z' tiene la dirección del vector propio asociado al valor propio 8. Entonces, después de obtener las rectas invariantes podríamos dibujar la cuádrica $2y'^2 + 8z'^2 = 0$, que es singular: la recta $(x, 0, 0)$.

Pero como sí hay términos lineales, debemos formar la matriz de rotación para transformar la parte lineal.

Para $\lambda = 0$ el sistema es

$$x - z = 0;\ 8y = 0;\ -x + z = 0,$$

que implica $x = z$ y $y = 0$. Entonces, un vector característico unitario es $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$.

Para $\lambda = 2$ el sistema es

$$-x - z = 0;\ 6y = 0;\ -x - z = 0,$$

que implica $x = -z$ y $y = 0$, y un vector característico unitario es $(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$.

Para $\lambda = 8$ el sistema es

$$-7x - z = 0; \; 0y = 0; \; -x - 7z = 0,$$

que implica $x = z = 0$ mientras que y es libre de tomar cualquier valor. Entonces, un vector característico unitario es $(0, 1, 0)$.

De hecho, una vez obtenidos dos vectores característicos unitarios, el tercero puede calcularse simplemente como el producto cruz de ellos pues el teorema nos asegura que estamos haciendo lo correcto y así la matriz con esas tres columnas, en ese orden, ya es de rotación.

La forma matricial de la parte lineal es

$$(-\sqrt{2}\; 0\; -\sqrt{2}) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix},$$

y debemos sustituir el vector columna de la derecha por

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

La nueva parte lineal es entonces

$$(-\sqrt{2}\; 0\; -\sqrt{2}) \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = -2x'.$$

Así, la forma canónica de la cuádrica es

$$2y'^2 + 8z'^2 - 2x' = 0,$$

lo cual ya nos permite identificarla como un paraboloide elíptico.

Ahora bien, para dibujar el paraboloide, primero trazamos los ejes X', Y' y Z' en las direcciones de los vectores propios y con respecto a esos ejes dibujamos el paraboloide elíptico (véase la Figura 7.12).

Desde luego, si el orden de los valores propios hubiera sido otro, por ejemplo 8 primero, luego 0 y por último 2, la ecuación cambiaría:

$$8x'^2 + 2z'^2 - 2y' = 0,$$

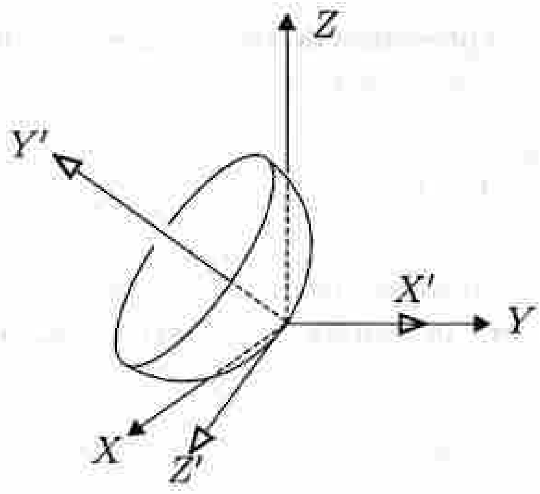

Figura 7.12: Paraboloide elíptico dado por $x^2 + 8y^2 + z^2 - 2xz - \sqrt{2}x - \sqrt{2}z = 0$.

pero hubiéramos debido dibujar este paraboloide respecto a los ejes X', Y', Z' con direcciones $(0,1,0)$, $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$, y $(1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$ respectivamente y el paraboloide sería exactamente el mismo.

Ahora, vayamos al segundo punto.

Comentamos que al proyectar un aro de alambre en un plano convenientemente inclinado se obtiene una cónica (ésta es una forma de interpretar la Figura 5.23), pero como la proyección de un plano en otro desde un punto exterior a ambos es una transformación lineal entre los planos, puesto que la imagen de una recta $\mathcal{L}$ en el plano π es una recta $\mathcal{L}'$ en el plano π' podemos reinterpretar el hecho consignado en la figura mencionada así:

Una cónica es la imagen de la circunferencia unitaria bajo una transformación lineal.

Para simplificar el resto de la explicación, tomemos una transformación lineal no singular del plano cartesiano en sí mismo, $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ y apliquémosla a la circunferencia unitaria. Si los transformados de los vectores de la base canónica son

$$T(1,0) = (r,s) \text{ y } T(0,1) = (t,u),$$

tenemos

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y, por tanto, } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r & t \\ s & u \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Si las componentes de la matriz inversa son $\rho, \sigma, \tau, \kappa$ (la expresión exacta no es importante para la discusión), entonces al sustituir en la ecuación matricial de la circunferencia las expresiones de (x, y) como vector renglón y como vector columna, obtenemos, según deberá comprobar el lector,

$$1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & \sigma \\ \tau & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & \tau \\ \sigma & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

La multiplicación de una matriz por su transpuesta da como resultado una matriz simétrica, que será la matriz de la parte cuadrática de la cónica:

$$\begin{pmatrix} \rho & \sigma \\ \tau & \kappa \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho & \tau \\ \sigma & \kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho^2 + \sigma^2 & \rho\tau + \sigma\kappa \\ \rho\tau + \sigma\kappa & \tau^2 + \kappa^2 \end{pmatrix}.$$

Si la cónica obtenida es una elipse, los diámetros de la circunferencia van en los diámetros de la elipse y, en consecuencia, un diámetro de la circunferencia es el que más se alarga y otro, perpendicular, es el que menos se alarga bajo T (véase la Figura 7.13).

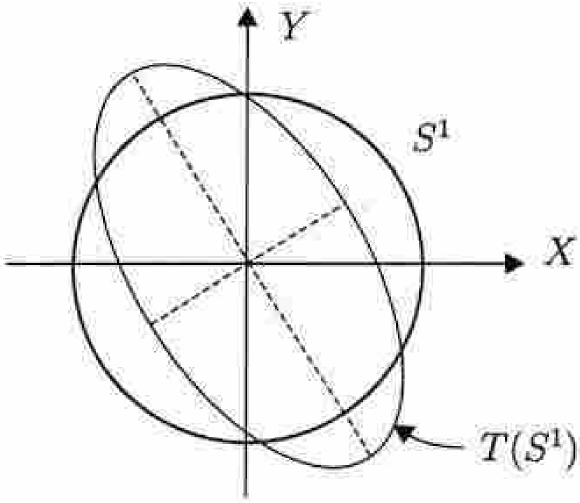

Figura 7.13: Una transformación lineal no singular lleva una circunferencia en una cónica.

Ésa es la información que proporciona la transformación inducida por la matriz de la parte cuadrática, pues si la ecuación hubiera resultado canónica,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

es decir, si

$$\rho^2 + \sigma^2 = 1/a^2, \ \rho\tau + \sigma\kappa = 0, \ \tau^2 + \kappa^2 = 1/b^2,$$

entonces, para "regresar" la elipse a la circunferencia podríamos plantear la existencia de una transformación R cuya inversa (que en este caso claramente es T^{-1}) tenga una matriz M que logre lo siguiente

$$M^t \begin{pmatrix} 1/a^2 & 0 \\ 0 & 1/b^2 \end{pmatrix} M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Un tratamiento totalmente análogo al seguido para eliminar los términos mixtos nos diría que los vectores columna de M son vectores propios de la transformación inducida por la matriz de la parte cuadrática, que en este caso es diagonal y es el cuadrado de la matriz diagonal cuya diagonal tiene como entradas $1/a$ y $1/b$. Los valores propios de esta última matriz son justamente $1/a$ y $1/b$ y sus vectores propios son los de los ejes.

EJERCICIOS

1. Dibuje las cónicas en posición no canónica cuyas ecuaciones damos a continuación.

   a) $3x^2 + y^2 - 2\sqrt{3}xy - 8x - 8\sqrt{3}y = 0$;

   b) $xy - x + y - 3 = 0$;

   c) $13x^2 + 7y^2 - 6\sqrt{3}xy - 16 = 0$.

2. Dibuje las cuádricas cuyas ecuaciones damos a continuación.

   a) $3x^2 - y^2 - 3z^2 - 4xz + 2 = 0$;

   b) $2xy + 2xz + 2y - 5 = 0$;

   c) $xz - x + z - 3 = 0$;

   d) $5x^2 + z^2 + 3xz - 8y = 0$.

3. Una recta está determinada por dos puntos, una circunferencia lo está por tres puntos; ¿cuántos puntos y bajo qué condición determinan una cónica en posición no canónica?