19 abril 2018.

ROTACIONES

→ Forma Cuadrática.

$\mathbb{R}^2$: CÓNICAS

Def 1. Una $\boxed{\text{ECUACIÓN CUADRÁTICA}}$ con 2 variables sin términos lineales es una ecuación de la forma:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = D$$

donde $|A| + |B| + |C| \neq 0$; Es decir, por lo menos uno de los números $A, B, C \neq 0$.

Def. 2 Una $\boxed{\text{FORMA CUADRÁTICA}}$ con 2 variables es una expresión de la forma:

$$F(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 = A\vec{v}\cdot\vec{v}$$

donde $|A| + |B| + |C| \neq 0$.

MATRIZ

$A = 1 \quad B = -4 \quad C = 3$

$x^2 - 4xy + 3y^2 = 6$

$$A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$$

Ejemplo: $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow$ matriz simétrica

$$F(x, y) = A\vec{v}\cdot\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 6$$

$$= \boxed{x^2 - 4xy + 3y^2 = 6}$$

19 · abril · 2018.

ÁLGEBRA LINEAL

R_1 = Sea A una matriz real de nxn. Entonces A es diagonalizable (matriz diagonal) ortogonalmente (matriz ortogonal) $\Longleftrightarrow$ A es simétrica.

matriz ortogonal

CONSECUENCIA: $\exists\ Q$ tal que $\boxed{Q^t A Q = D}$

donde

$$D = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2)$$

donde λ_1 y λ_2 son los valores característicos de A.

Características de Q (Matriz Real y Ortogonal)

1) $Q^t = Q^{-1}$

2) $\det Q = \pm 1$

3) $Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\text{sen}\,\theta \\ \text{sen}\,\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ con $\theta \in (0, 2\pi)$

4) $Q = R = \begin{bmatrix} \underbrace{\vec{u_1} \;\vdots\; \vec{u_2}} \end{bmatrix}$

valores característicos (unitarios)

$\exists\ Q$, $Q^t = Q^{-1}$

Multiplicando $\boxed{Q}$ por la izquierda:

$$\left[\boxed{Q}\,Q^t\right] A Q = \boxed{Q}\,D$$

I = matriz identidad.

19·abril·2018

$$I\,AQ = QD$$

$$\boxed{AQ = QD} \rightarrow \text{Transformación de semejanza.}$$

Multiplicación de $\boxed{Q^t = Q^{-1}}$ por la derecha.

$$A[Q\,Q^{-1}] = QD\,Q^{-1}$$

I = matriz identidad.

$$\boxed{A = QDQ^{-1}}$$

TEOREMA DE LOS EJES PRINCIPALES:

Sea $ax^2 + bxy + cy^2 = d$ una ecuación cuadrática en las variables $x y$, entonces existe un sólo número $\theta \in [0, 2\pi]$ tal que la ecuación se puede escribir en la forma:

$$a'x'^2 + c'y'^2 = d$$

donde x', y' son los ejes que se obtienen al rotar los ejes x, y un ~~∡~~ θ en sentido antihorario.

Por otra parte, los números a' y c' son los valores característicos de la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$.

Los ejes x', y' reciben el nombre de $\boxed{\text{EJES PRINCIPALES}}$ de la gráfica de la ecuación cuadrática.

Vectores Característicos Unitarios.

19 abril 2018.

R_2: Problema de Valores y Vectores Característicos.

"EIGEN valores / vectores"

$$\boxed{A\vec{v} = \lambda\vec{v}}$$

$$A\vec{v} - \lambda\vec{v} = \vec{0}$$

$$[A - \lambda]\vec{v} = \vec{0}$$

↳ Para poderlo resolver se multiplica λ por matriz identidad.

$$\underbrace{[A - I\lambda]}_{B}\vec{v} = \vec{0}$$

$B\vec{v} = \vec{0}$ → SISTEMA LINEAL HOMOGENEO → Solución trivial ⇒ $\det B \neq 0$

→ Conjunto infinito de soluciones ⇒ $\det B = 0$

$$\therefore \boxed{|A - \lambda I| = 0} \xrightarrow{\text{obtendremos}} \text{Polinomio característico} \xrightarrow{\text{y después}} \text{Valores característicos.}$$

Aplicando al ejemplo:

$$\left| \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right| = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda) - 4 = 0$$

$$3 - \lambda - 3\lambda + \lambda^2 - 4 = 0$$

$$\boxed{\lambda^2 - 4\lambda - 1 = 0} \rightarrow \text{Polinomio característico}$$

Examen → Jueves 3 mayo

19 abril 2018.

Para obtener los valores característicos, debemos obtener las raíces del polinomio:

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2-4(1)(-1)}}{2(1)}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16+4}}{2}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{20}}{2}$$

$$\begin{array}{r|l} 20 & 2 \\ 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{2^2 \cdot 5}}{2}$$

$$= \frac{4}{2} \pm \frac{2\sqrt{5}}{2}$$

$$= 2 \pm \sqrt{5}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_1 &= 2+\sqrt{5} \\ \lambda_2 &= 2-\sqrt{5} \end{aligned}}$$

$$\therefore D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+\sqrt{5} & 0 \\ 0 & 2-\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Por el Teorema de los Ejes Principales $a'x'^2 + b'y'^2 = d$

$$(2+\sqrt{5})\,x'^2 + [2-\sqrt{5}]\,y'^2 = 6.$$

$$\frac{x'^2}{\frac{1}{2+\sqrt{5}}} + \frac{y'^2}{\frac{1}{2-\sqrt{5}}} = 6.$$

$$\frac{x'^2}{\frac{6}{2+\sqrt{5}}} + \frac{y'^2}{\frac{6}{2-\sqrt{5}}} = 6 \Rightarrow \boxed{\frac{x'^2}{\frac{6}{2-\sqrt{5}}} - \frac{y'^2}{\frac{6}{\sqrt{5}+2}} = 6}$$

HIPÉRBOLA.

Wolfram Alpha.

24·abril 2018.

NOTAS:

- El teorema de los Ejes Principales se puede emplear para identificar 3 secciones cónicas:
  - circunferencia
  - elipse
  - hipérbola.

- Para los demás casos se justifica por el siguiente teorema:

TEOREMA → Sea $A = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$ entonces la ecuación cuadrática: $ax^2 + bxy + cy^2 = d$; $d \neq 0$. es la ecuación de:

1. Una <u>HIPÉRBOLA</u> si $\det A < 0$.
2. Una <u>elipse</u>, <u>circunferencia</u>, o sección <u>cónica</u> degenerada si $\det A > 0$
3. Un par de líneas o una sección cónica degenerada si $\det A = 0$.

Si $d=0$, entonces la ecuación cuadrática es la de 2 líneas rectas si $\det A \neq 0$ y es la ecuación de 1 sola recta si $\det A = 0$.

EJEMPLO → Halle la rotación de ejes que reduzca la ecuación:

$$5x^2 + 8xy + 5y^2 + 4xz + 4yz + 2z^2 = 100$$

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + 2Dxy + 2Exz + 2Fyz = J}$$

$$(x \ y \ z)\begin{bmatrix} A & D & E \\ D & B & F \\ E & F & C \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = J \longrightarrow A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \rightarrow \text{matriz simétrica.}$$

$2D = 8$ $\quad$ $2E = 4$ $\quad$ $2F = 4$

$D = 4$ $\quad$ $E = 2$ $\quad$ $F = 2$

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = 0$$

$$= \begin{vmatrix} 5-\lambda & 4 & 2 \\ 4 & 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$= (5-\lambda)\begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 4 & 5-\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (5-\lambda)\left[(5-\lambda)(2-\lambda)-4\right] - 4\left[4(2-\lambda)-4\right] + 2\left[8-(5-\lambda)(2)\right]$$

$$= (5-\lambda)\left[\lambda^2 - 7\lambda + 6\right] - 4\left[-4\lambda + 4\right] + 2\left[2\lambda - 2\right]$$

$$= 5\lambda^2 - 35\lambda + 30 - \lambda^3 + 7\lambda^2 - 6\lambda + 16\lambda - 16 + 4\lambda - 4$$

$$= -\lambda^3 + 12\lambda^2 - 21\lambda + 10 = 0$$