7. Demuestre que si cualquier corte de una superficie cuádrica con un plano es una elipse, la superficie debe ser un elipsoide.
8. Justifique la afirmación siguiente: el cono de ecuación $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=z^2$ es un caso límite tanto de una familia de hiperboloides de un manto como de una familia de hiperboloides de dos mantos. *Sugerencia:* sustituya el 1 en el lado derecho de la ecuación canónica de un hiperboloide de un manto por $k \in \mathbb{R}$; ¿qué superficie resulta cuando $k=0$? ¿Y cuando $k=-1$? ¿Y cuando $k<0$? ¿Y cuando $k>0$?
9. Demuestre que nuestro análisis abarcó todos los casos posibles.
10. Haga el análisis de las posibles superficies correspondientes a la ecuación $x^2+2y^2+3z^2+Gx+Hy+Iz+J=0$, dependiendo del signo de G, H, I y J.

6.4. Simetrías y extensión

Analizaremos ahora algunas propiedades de las superficies cuadráticas. Veremos que ese análisis es muy sencillo a partir de las ecuaciones canónicas consignadas en el inciso anterior, pues esas ecuaciones resultaron de ubicar apropiadamente las cónicas que las originaron.

Simetrías

Si recordamos la definición de simetría respecto a cada uno de los planos coordenados, de los ejes coordenados o del origen, es inmediato concluir lo siguiente (nos referiremos a la numeración utilizada en la lista del final del inciso anterior):

1) Un elipsoide tiene *tres planos de simetría, tres ejes de simetría y un centro de simetría.*

   El elipsoide en posición canónica tiene los tres planos coordenados como planos de simetría, pues cuando una de las coordenadas de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ del elipsoide cambia de signo, por ejemplo $x_0 \mapsto -x_0$, resulta un punto simétrico respecto al plano de las otras dos variables, YZ en nuestro ejemplo, pero como la variable x aparece elevada al cuadrado en la ecuación del elipsoide, el punto $P'(-x_0, y_0, z_0)$ satisface también la ecuación del elipsoide.

En consecuencia, los ejes coordenados son ejes de simetría del elipsoide, pues en el ejercicio 7 de la sección 3 del capítulo 1 se demostró que si dos planos coordenados son ejes de simetría de una figura, el eje común resulta eje de simetría de la figura. Los segmentos de los ejes de simetría encerrados en el elipsoide se denominan *ejes del elipsoide*, y sus longitudes son las *longitudes de los ejes.*

Y, desde luego, el punto P'''' simétrico respecto al origen de un punto P en el elipsoide tiene como coordenadas las negativas del punto original, y al elevarlas al cuadrado la ecuación sigue siendo satisfecha. Este centro de simetría se denomina *centro del elipsoide.*

2) Un hiperboloide de dos mantos tiene *tres planos de simetría, tres ejes de simetría y un centro de simetría.*

   Los argumentos son exactamente los mismos que en el caso anterior.

3) Un hiperboloide de un manto tiene *tres planos de simetría, tres ejes de simetría y un centro de simetría.*

   Nuevamente, la demostración se basa en el hecho de que todas las variables aparecen sólo con grado par.

4) Un paraboloide elíptico tiene *dos planos de simetría y un eje de simetría.*

   En este caso, sólo pueden cambiar de signo las variables que aparecen con exponente cuadrático, mientras que la variable cuyo exponente es uno impide que haya simetría respecto al plano de las otras dos.

5) Un paraboloide hiperbólico tiene *dos planos de simetría y un eje de simetría.*

   Las razones son las mismas del caso anterior.

6) Un cilindro elíptico tiene *un número infinito de planos de simetría, un número infinito de ejes de simetría y un número infinito de centros de simetría.*

   Además de los planos sobre los ejes de la elipse sobre la que se levanta el cilindro, deben considerarse todos los planos paralelos al plano de dicha elipse. Un eje de simetría es la recta por el centro de dicha elipse y perpendicular al plano de la elipse (a esta recta suele llamársele *eje del cilindro elíptico*), y los restantes son los ejes de las elipses paralelas a la original y los de ella misma (¿por qué?). Los centros de simetría son los puntos del llamado eje del cilindro.

7) Un cilindro hiperbólico tiene *un número infinito de planos de simetría, un número infinito de ejes de simetría y un número infinito de centros de simetría.*

   Las razones son las mismas del caso anterior.

8) Un cilindro parabólico tiene *un número infinito de planos de simetría y un número infinito de ejes de simetría.*

   En este caso todos los planos de simetría son paralelos al plano de la parábola sobre la que se levanta el cilindro, y los ejes de simetría del cilindro son los ejes de las parábolas que resultan de cortar con un tal plano al cilindro parabólico.

9) Un cono elíptico tiene *tres planos de simetría, tres ejes de simetría y un centro de simetría.*

   Eso se debe a que cada variable aparece con grado 2 únicamente.

10) Dos planos que se cortan tienen *un número infinito de planos de simetría, un número infinito de centros de simetría y un número infinito de ejes de simetría.*

    Además de los dos planos que bisecan a los planos analizados, deben considerarse los planos paralelos entre sí y perpendiculares a los planos dados; la recta en que se cortan los planos analizados es un eje de simetría, y cualquier punto del eje funciona como centro de simetría. Pero también son ejes de simetría las rectas en los planos que bisecan y perpendiculares a la recta de intersección de los planos. Pediremos al lector que justifique estas afirmaciones en los ejercicios.

11) Dos planos paralelos tienen *un número infinito de planos de simetría, de ejes de simetría y de centros de simetría.*

    Además de los planos ortogonales a ambos planos, hay simetría respecto al plano paralelo a los dos y equidistante de ambos. Las rectas de dicho plano son ejes de simetría de la figura formada por la unión de los dos planos, y cualquier punto de dicho plano es un centro de simetría.

12) Un plano doble tiene *un número infinito de planos de simetría, un número infinito de ejes de simetría y un número infinito de centros de simetría.*

Pediremos al lector encontrar todos los planos, ejes y centros de simetría de este caso.

13) Una recta tiene *un número infinito de planos de simetría, un número infinito de ejes de simetría y un número infinito de centros de simetría.*

También en este caso, será el lector quien encuentre los elementos mencionados.

14) Un punto tiene *un número infinito de planos de simetría y de ejes de simetría, pero sólo un punto de simetría.*

El lector no tendrá problema para justificar lo anterior.

15) El conjunto vacío tiene *simetría respecto a cualquier plano, cualquier recta y cualquier punto.*

La justificación de lo anterior es que la definición de cualquier tipo de simetría es *condicional:* si $P \in (figura)$ ..., pero como el conjunto vacío carece de elementos, no hay condición que satisfacer.

Extensión

Decimos que una figura en el espacio tridimensional está *acotada* si existe alguna esfera que la contiene.

Como la única cónica acotada es la elipse, cuando una superficie contenga parábolas o hipérbolas no podremos encontrar ninguna esfera que la contenga. Pero también sería útil encontrar un plano que deje a la superficie en uno del semiespacios que define, o una "rebanada del espacio" (la región entre dos planos paralelos) en la que no haya puntos de la superficie, etc.

Para determinar regiones sencillas que contengan a nuestras superficies, haremos referencia nuevamente a las ecuaciones canónicas del inciso anterior.

a) En el caso de los cilindros, bastará considerar los cilindros sobre la frontera de las regiones que contenían a la cónica que origina el cilindro para obtener las regiones que encierran a la cuádrica.

Como ejemplo, consideremos un cilindro hiperbólico:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

y la región que encierra a la hipérbola con esa misma ecuación en el plano XY, la cual está delimitada por las asíntotas y las rectas $x = \pm a$; entonces el cilindro hiperbólico consta de dos pedazos, uno sobre cada una de las ramas y contenido en la región acotada por los tres planos

$$y = (b/a)x, \quad y = -(b/a)x, \quad x = \pm a,$$

donde el signo $-$ se toma para la parte del cilindro sobre la rama izquierda de la hipérbola, y el signo $+$ se toma para la parte del cilindro sobre la rama derecha de la hipérbola.

El análisis de la extensión del resto de los cilindros cuadráticos correrá por cuenta del lector.

b) Entonces sólo falta analizar las superficies correspondientes a las ecuaciones canónicas 1)–5), del elipsoide al paraboloide hiperbólico, y 9), el cono elíptico.

El elipsoide de ecuación canónica

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

está acotado por la esfera de radio $r = \max\{a, b, c\}$, pues cualquier punto $P(x, y, z)$ en el elipsoide tiene norma menor que r, como es inmediato comprobar. Si $r = a$, es decir, $b, c \leq a$, entonces

$$\begin{aligned} \frac{y^2}{b^2} &\geq \frac{y^2}{a^2}, \\ \frac{z^2}{c^2} &\geq \frac{z^2}{a^2}, \end{aligned}$$

y, en consecuencia, si $P(x, y, z)$ satisface la ecuación del elipsoide, las desigualdades anteriores dan lugar a la desigualdad

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{a^2} \leq 1,$$

que implica

$$|P| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \leq a.$$

El hiperboloide de dos mantos,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

y el hiperboloide de un manto,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

están separados por el cono elíptico

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

De hecho, es conveniente pensar en la *familia de hiperboloides* correspondientes a las ecuaciones, una por cada $k \in \mathbb{R}$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = k.$$

Cuando $k = 0$ se trata del cono elíptico, cuando $k > 0$ se trata de un hiperboloide de un manto cuya "cintura" es tanto más reducida cuanto menor sea $k > 0$, y cuando $k < 0$, para tener una ecuación de tipo canónico deberemos dividir ambos lados de la igualdad entre k, pero como $k < 0$ los signos del miembro izquierdo cambian y la ecuación corresponde a un hiperboloide de dos mantos. Los "vértices" de ambos mantos son más cercanos al vértice del cono cuanto menor sea $|k|$.

El estudiante que tenga nociones de cálculo de varias variables reconocerá que estamos hablando de las *superficies de nivel* $k \in \mathbb{R}$ de la función $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}.$$

La superficie de nivel k está formada por los puntos $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tales que al aplicarles la función dan el valor k. Se dice que el espacio está *foliado* por los hiperboloides (cono incluido) de nivel k, pues cada punto pertenece a una y sólo una de las *hojas* de la foliación.

El paraboloide elíptico:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z,$$

está contenido en uno de los semiespacios determinados por el plano XY, pues dicho plano contiene a todas las rectas que son borde de uno de los semiplanos que contienen a una de las parábolas obtenidas al cortar el paraboloide con uno de los planos que contienen al eje (de simetría) del paraboloide. Sugerimos al lector que haga un dibujo de la situación que acabamos de describir.

El paraboloide hiperbólico:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z,$$

no puede acotarse por una región sencilla, pues ninguna de las coordenadas de sus puntos presenta alguna restricción, y, de hecho, contiene puntos arriba y abajo del plano XY, a derecha e izquierda del plano XZ, y en ambos lados del plano YZ. Por tanto, no podemos proponer alguna región sencilla que lo limite.

El cono elíptico:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z^2,$$

correspondiente a $k = 0$ en la familia de los hiperboloides, puede decirse que está contenido en cualquiera de los hiperboloides de un manto

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - z^2 = k > 0,$$

y, adicionalmente, sabemos que contiene sólo un punto, el vértice, en el plano perpendicular al eje por el dicho vértice.

EJERCICIOS

1. Haga un dibujo de cada una las superficies cuádricas 1)–14), marque un punto y localice todos los puntos simétricos respecto a los planos, rectas y puntos mencionados en el análisis de las simetrías.
2. Justifique las simetrías señaladas en el texto y que no fueron justificadas formalmente, correspondientes a los casos 10), 12), 14).
3. Determine y dibuje regiones que acoten a las superficies siguientes:

   a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{16} = 1$,

   b) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{4} - \frac{z^2}{9} = 1$,

   c) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{16} = z$.
4. Establezca una regla sencilla en términos de coordenadas para determinar si hay simetría respecto a planos paralelos a los coordenados, a ejes paralelos a los coordenados y a un punto cualquiera.

6.5. Cuádricas con ejes paralelos a los coordenados

Si trasladamos paralelamente una cuádrica $\mathcal{S}$ en posición canónica, cada punto $P \in \mathcal{S}$ se desplaza por un mismo vector $\bar{u}_0 = (h, k, l)$ para convertirse en el punto $P' \in \mathcal{S}'$, es decir,

$$P' = P + \bar{u}_0$$

o, equivalentemente,

$$P = P' - \bar{u}_0,$$

que en términos de coordenadas da las igualdades

$$x = x' - h, \quad y = y' - k, \quad z = z' - l.$$

Ahora utilizamos el mismo razonamiento aplicado para obtener la ecuación de una cónica trasladada: si la ecuación de la cuádrica $\mathcal{S}$ es

$$f(x, y, z) = 0,$$

la ecuación de la cónica trasladada $\mathcal{S}'$ es

$$f(x' - h, y' - k, z' - l) = 0$$

que, si suprimimos las primas, puede escribirse como una nueva ecuación en x, y, z:

$$F(x, y, z) = 0$$

y cuyo lugar geométrico es precisamente la cuádrica trasladada.

Por tanto, la "regla" para obtener la ecuación de la cuádrica traladada S' por el vector $\bar{u} = (h, k, l)$ es efectuar las sustituciones

$$x \mapsto x - h, \quad y \mapsto y - k, \quad z \mapsto z - l.$$

Como único ejemplo escribamos la ecuación del paraboloide hiperbólico cuyo punto silla es $(-3, -2, -1)$ obtenido al trasladar por el vector $(-3, -2, -1)$ al paraboloide hiperbólico de ecuación canónica

$$z^2 - x^2 = y.$$

Según la regla, en esta ecuación debemos efectuar las sustituciones siguientes:

$$x \mapsto x + 3, \quad y \mapsto y + 2, \quad z \mapsto z + 1,$$

y obtenemos

$$(z + 1)^2 - (x + 3)^2 = y + 2.$$

El lector queda encargado de hacer un dibujo del paraboloide hiperbólico trasladado; note que los planos y ejes de simetría también se trasladan: los planos de simetría son los planos $x = -3$ y $z = -1$. mientras que el eje de simetría es la recta paralela al eje Y de ecuación vectorial $(-3, -2, -1) + t(0, 1, 0)$.

EJERCICIOS

1. Analice las simetrías del paraboloide hiperbólico $(z+1)^2 - (x+3)^2 = y+2$ utilizando el análisis del caso canónico.
2. Dé una ecuación que corresponda a una cuádrica con ejes paralelos a los coordenados para cada tipo 1)-14).
3. Haga el dibujo correspondiente a cada una de las ecuaciones del inciso anterior.
4. Haga el dibujo correspondiente a cada una de las ecuaciones siguientes: